Mh. Math. 108, 325—336 (1989)

Monatshefte für Mathematik

Über Vorzeichenwechsel einiger arithmetischer Funktionen. III

Von

Bogdan Szydło, Poznań

(Eingegangen am 12. Juni 1989)

Abstract. On Sign-Changes of Certain Arithmetical Functions. III. Denote by $V(\Delta_K, X)$ the number of sign-changes in $[0, X]\,(X>0)$ of the remainder-term $\Delta_K(x) := \psi_K(x) - x$ of the prime-ideal theorem $\lim_{x\to\infty} \psi_K(x)/x = 1$, where $\psi_K(x) := \sum_{N\mathfrak{p}^r \leqslant x} \log N\mathfrak{p}$ stands for the generalized Chebyshev function of an algebraic number field K. Under certain conditions some effective estimates of the kind

$$V(\Delta_K, X) \geqslant c_K \log X \quad (X \geqslant X_K)$$

are obtained, where $c_K > 0$ and $X_K \geqslant 2$ depend in an explicit way on the parameters of the field K and the zeros of the Dedekind zeta function ζ_K.

1. Einleitung

Sei K ein algebraischer Zahlkörper des Grades n und d der absolute Betrag seiner Diskriminante. Bezeichne ψ_K die verallgemeinerte Tschebyschevsche Funktion

$$\psi_K(x) := \sum_{N\mathfrak{p}^r \leqslant x} \log N\mathfrak{p} \quad (x > 0)$$

und

$$\Delta_K(x) := \psi_K(x) - x \quad (x > 0)$$

das Restglied im Primidealsatz

$$\lim_{x\to\infty} \psi_K(x)/x = 1.$$

Unter Verwendung der Methode von [9], die eine Verschärfung der Methode von Kaczorowski [2] (s. auch [3], [4]) darstellt, behandeln wir in diesem Artikel die Aufgabe, die Funktion $V(\Delta_K, X)$, welche die Anzahl der Vorzeichenwechsel von Δ_K im Intervall $[0, X]\,(X > 0)$ angibt, effektiv von unten abzuschätzen; vgl. [4], wo dieselbe Aufgabe mit Hilfe der ursprünglichen Gestalt dieser Methode behandelt wird.

Oszillatorische Eigenschaften von Δ_K werden durch die gegenseitige Stellung der nichttrivialen Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma\ (\beta, \gamma \in \mathbb{R})$ der Dedekindschen Zetafunktion ζ_K determiniert. Wir bezeichnen mit γ_K den Imaginärteil der niedrigsten nichttrivialen Nullstelle von ζ_K. SIEGEL [8] bewies, daß es eine von K unabhängige effektive positive Konstante C mit

$$\gamma_K \leqslant C \tag{1.1}$$

gibt. NEUGEBAUER [7] gab den Wert $C = 60$ an. HOFFSTEIN [1] stellte fest, daß für alle Körper mit genügend großem Grad n

$$\gamma_K \leqslant 0,87$$

ist. Diese Tatsachen und der allgemeine Satz aus [9, I] implizieren die folgende Bemerkung.

Die Dedekindsche Zetafunktion ζ_K habe keine reellen nichttrivialen Nullstellen. Damit man die Ungleichung

$$V(\Delta_K, X) \geqslant c_K \log X \quad (X \geqslant X_K),$$

wobei $c_K > 0$ und $X_K \geqslant 2$ explizit anzugeben sind, erhalten kann, genügt es, daß man die Lokalisation der nichttrivialen Nullstellen von ζ_K in einem Streifen, etwa $|t| < 100$, kennt. Ist der Grad n des Zahlkörpers K genügend groß, so kann man die Zahl 100 oben durch die Zahl 3/2 ersetzen.

Um die Hauptergebnisse des Artikels zu formulieren, führen wir einige Bezeichnungen ein. Mit $\varrho_K = \beta_K + i\gamma_K$ wird die nichttriviale Nullstelle $\varrho = \beta + i\gamma$ von ζ_K (mit $\beta \geqslant 1/2$, $\gamma = \gamma_K$) bezeichnet, welche der Geraden $\sigma = 1/2$ am nächsten liegt. Für $H > \gamma_K$ werden zunächst die verschiedenen Realteile aller nichttrivialen Nullstellen aus dem Streifen $0 \leqslant t < H$ mit

$$\beta'_0 = \beta_K, \beta'_1, \ldots \quad \text{(endliche Menge)}$$

und dann die niedrigsten Nullstellen auf den Geraden $\sigma = \beta'_\mu$ mit $\varrho'_\mu = \beta'_\mu + i\gamma'_\mu$ bezeichnet; insbesondere ist $\varrho'_0 = \varrho_K$. Wir führen schließlich

$$b(H) := \min_{\mu \neq \nu} |\beta'_\mu - \beta'_\nu|, \tag{1.2}$$

$$g(H) := \min_{\mu} \min \{\gamma - \gamma'_\mu : \beta = \beta'_\mu,\ \gamma'_\mu < \gamma < \gamma'_\mu + 1,\ \gamma < H\} \tag{1.3}$$

(mit den Vereinbarungen: $\min \varnothing := +\infty$, $1/+\infty := 0$) ein.

Satz 1. *Die Dedekindsche Zetafunktion ζ_K habe keine reellen nichttrivialen Nullstellen. Sei*

$$H \geqslant \max\{20, |\varrho_K|^2\}. \tag{1.4}$$

Dann gibt es von K unabhängige effektive positive Konstanten c_1, c_2 und c_3 derart, daß für

$$\log X \geqslant \max \Big\{ c_1 H^2 (\log\log H + \log\log(d+2)) \Big(1 + \frac{1}{\gamma_K g(H)}\Big),$$
$$c_2 \frac{H^3 (n^2 \log^2 H + \log^2 d)(\log H + \log\log(d+2))}{b(H)},$$
$$c_3 \frac{H^2 (n \log H + \log d)}{\gamma_K} \Big\} \tag{1.5}$$

gilt

$$V(\Delta_K, X) \geqslant \Big(1 - \frac{10}{H}\Big) \frac{\gamma_K}{\pi} \log X. \tag{1.6}$$

Satz 2. *Jede nichttriviale Nullstelle $\varrho = \beta + i\gamma$ von ζ_K, die im Streifen $|t| < H$ liegt, wobei $H \geqslant \max\{20, |\varrho_K|^2\}$ ist, genüge der Bedingung $\beta = 1/2$ und es sei auch $\zeta_K(1/2) \neq 0$. Dann gibt es von K unabhängige, effektive positive Konstanten c_4 und c_5 derart, daß für*

$$\log X \geqslant \max \Big\{ c_4 H^2 \log\log(d+2) \Big(1 + \frac{1}{\gamma_K g(H)}\Big),\ c_5 \frac{H}{\gamma_K} \Big\}$$

die Ungleichung (1.6) *gilt.*

Vergleichen wir Satz 1 mit Theorem 1 aus [4], das in der folgenden äquivalenten Form dargestellt werden kann:

Sei $\varkappa := \sup_K \gamma_K$. Für einen fixierten algebraischen Zahlkörper K und $H > 10$ werden

$$B(H) := \min\{|\beta - \beta'| : \beta \neq \beta';\ |\gamma|, |\gamma'| \leqslant \varkappa^H\},$$
$$G(H) := \min\{|\gamma - \gamma'| : \gamma \neq \gamma';\ |\gamma|, |\gamma'| \leqslant \varkappa^H\}$$

eingeführt [*vgl.* (1.2), (1.3)]. ζ_K *habe keine reellen nichttrivialen Nullstellen. Dann gibt es eine nur von H abhängige effektive Konstante* $c_0(H) > 0\,(H > 10)$ *derart, daß für*

$$\log X \geqslant c_0(H)\left(\frac{1}{B(H)} + \frac{1}{G^2(H)}\right)\log\left(2 + \frac{\log 2d}{\gamma_K}\right)\log^2(2d)$$

die Ungleichung (1.6) *gilt.*

Eine genauere Betrachtung des Beweises dieses Ergebnisses zeigt, daß $c_0(H) \gg \exp(cH)$ ist, wobei $c > 0$ eine von K unabhängige Konstante bedeutet.

Es ist zu erwähnen, daß der Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ (Zahlkörper der rationalen Zahlen) in [9, II] genauer betrachtet wurde. (*Berichtigung eines Versehens in der Formulierung von Satz 2 aus* [9, II]. Die Bedingung für X soll natürlich heißen: $X \geqslant \exp(0{,}09 \max\{4400, H\}\,H)$.)

In gewissem Grade ist die Beweismethode von Satz 1 (siehe § 3) schon in [2] und [9] enthalten. Daher wäre es angebracht, diese Artikel zuerst durchzusehen. Da der Beweis von Satz 2 in ähnlicher Weise durchgeführt werden kann, lassen wir ihn weg.

2. Weitere Bezeichnungen. Einige Abschätzungen

Für allgemeine Bezeichnungen siehe [9, I, S. 142]. Beim Berechnen der Summen vom Typus $\sum_\varrho$ werden einer nichttrivialen Nullstelle ϱ von ζ_K nicht ein sondern q identische Summanden zugeordnet, wobei q die Vielfachheit von ϱ bedeutet. Eine Ausnahme von dieser Regel wird in der Formel (3.4) weiter unten enthalten sein.

Im Winogradovschen Symbol $\ll$ implizierte numerische Konstanten und weiter $c_6, \ldots, c_{10} > 0$ werden von K unabhängig sein — jedenfalls unter der Annahme der Voraussetzungen von Satz 1.

Wir benötigen die klassische Ungleichung

$$n \ll \log(d + 1), \tag{2.1}$$

die einfache Folgerung aus [5, Lemma 3.2]:

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}\left(\frac{11}{10}\right) \ll n, \tag{2.2}$$

und die folgenden, klassisch beweisbaren Abschätzungen (vgl. z. B. [6], wo die entsprechenden Beweismethoden dargestellt sind):

$$-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}\left(-\frac{1}{10}+it\right) \ll \log(dh^n) \quad (|t| \leqslant h,\ h \geqslant 2), \tag{2.3}$$

$$-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s) - \sum_{|\gamma-h|<1} \frac{1}{s-\varrho} \ll \log(dh^n)$$
$$(s=\sigma+ih,\ -1/10 \leqslant \sigma \leqslant 11/10, h \geqslant 2), \tag{2.4}$$

$$\sum_{T \leqslant \gamma \leqslant T+1} 1 \ll \log(d(T+2)^n) \quad (T \geqslant 0). \tag{2.5}$$

Setzen wir

$$a_0 := \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s)+\frac{r}{s}\right),$$

wobei wie immer $r := r_1 + r_2 - 1$, r_1 die Anzahl der zu K konjugierten reellen Körper und $2r_2 := n - r_1$ ist.

Aus der Funktionalgleichung für ζ_K folgt

$$a_0 \ll \log(d+1) + \left|\sum_{\varrho}\frac{1}{\varrho}\right|.$$

Aus (2.5) und den geeigneten, klassisch beweisbaren Fakten über den sog. (logarithmischen) nullstellenfreien Bereich erhält man wegen der Voraussetzung $\gamma_K > 0$ von Satz 1

$$a_0 \ll \log^2(d+1). \tag{2.6}$$

3. Beweis von Satz 1

Auf dieselbe Weise wie in [9] benutzen wir den Operator **A**, dessen Wirkung auf eine Funktion $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{A}(f)(x) := x^{-k}\int_0^x f(\xi)\,\xi^{k-1}\,d\xi \quad (x>0)$$

definiert wird, falls f und $k \in \mathbb{R}$ geeigneten Bedingungen genügen. Das Ergebnis der m-fachen Iteration des Operators **A** (mit fixiertem k) wird mit $A_m(f)$ bezeichnet.

Nehmen wir $f = \psi_K$ und bestimmen den Wert des Parameters k:

$$k := 2h, \tag{3.1}$$

wobei $h \in (H-1, H)$ so zu wählen ist, daß für jede nichttriviale Nullstelle $\varrho = \beta + i\gamma$ von ζ_K

$$|h-\gamma| \geqslant \frac{1}{2(\mathfrak{n}+1)} \tag{3.2}$$

ist. Dabei bedeutet

$$\mathfrak{n} := \sum_{H-1 \leqslant \gamma \leqslant H} 1. \tag{3.3}$$

Es gilt

$$A_{m+1}(\psi_K)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left\{ -\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) \right\} \frac{x^s\, ds}{s(s+k)^{m+1}} \quad (x>0,\ m \in \mathbb{N}),$$

vgl. den Anfang des Beweises des Satzes aus [9, I]. Sei

$$D := \{s \in \mathbb{C}: -1/10 \leqslant \sigma \leqslant 11/10,\ |t| \leqslant h\} \cup \{s \in \mathbb{C}: \sigma \geqslant 11/10\},$$

und bezeichne

$$\Phi(s) := \left\{ -\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) \right\} \frac{x^s}{s(s+k)^{m+1}}.$$

Aus dem Residuensatz folgt

$$A_{m+1}(\Delta_K)(x) = \sum_{\varrho \in D} \operatorname*{Res}_{s=\varrho} \Phi(s) + \operatorname*{Res}_{s=0} \Phi(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \Phi(s)\, ds. \tag{3.4}$$

Mit $\{\varrho_0 = \varrho_K, \varrho_1, \ldots, \varrho_l\}$ wird eine minimale Teilmenge der Menge aller nichttrivialen Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ vom ζ_K aus D mit $\gamma > 0$ bezeichnet, die der folgenden Bedingung genügt:

Ist $\varrho \in D$ und $\gamma > 0$, so gibt es $\nu \in \{0, \ldots, l\}$ derart, daß

$\beta = \beta_\nu$ und $\gamma \geqslant \gamma_\nu$ gilt.

Die Vielfachheit von ϱ_ν wird mit q_ν bezeichnet. Es sei noch

$$\alpha_\nu(x) := \gamma_\nu \log x - \operatorname{Arg}(\varrho_\nu) - (m+1)\operatorname{Arg}(\varrho_\nu + k)$$
$$(x > 0;\ \nu = 0, \ldots, l).$$

Schreiben wir jetzt (3.4) in die Form

$$A_{m+1}(\Delta_K)(x) = \frac{-2q_0 x^{\beta_0}}{|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|^{m+1}}(\cos\alpha_0(x) + r_0 + R_1 + R_2) - $$
$$- \sum_{\nu=1}^{l} \frac{2q_\nu x^{\beta_\nu}}{|\varrho_\nu|\,|\varrho_\nu+k|^{m+1}}(\cos\alpha_\nu(x) + r_\nu) \tag{3.5}$$

um, wobei

$$|r_\nu| \leqslant \sum_{\substack{\beta=\beta_\nu \\ \gamma_0<\gamma<h}} \left|\frac{\varrho_\nu}{\varrho}\right| \left|\frac{\varrho_\nu + k}{\varrho + k}\right|^{m+1} \quad (\nu = 0, \ldots, l),$$

$$|R_1| \leqslant \frac{|\varrho_0|}{2} |\varrho_0 + k|^{m+1} x^{-\beta_0} |\operatorname*{Res}_{s=0} \Phi(s)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\varrho_0|}{2} \left|\frac{\varrho_0 + k}{k}\right|^{m+1} x^{-\beta_0} \left(r \left|\log x - \frac{m+1}{k}\right| + |a_0| \right),$$

$$|R_2| \leqslant \frac{|\varrho_0|}{4\pi} |\varrho_0 + k|^{m+1} x^{-\beta_0} \left| \int_{\partial D} \Phi(s)\, ds \right|$$

ist (trotz derselben Bezeichnung verwechsle man hier nicht r_1 und r_2 mit den entsprechenden Parametern des Zahlkörpers).

Ferner setzen wir

$$X \geqslant 2 \quad \text{und} \quad X^{18/k} \leqslant x \leqslant X \tag{3.6}$$

voraus und wählen

$$m := [10 \log X] + 1. \tag{3.7}$$

Betrachten wir zuerst $r_\nu (\nu = 0, \ldots, l)$. Für ϱ mit $\beta = \beta_\nu$, $\gamma_\nu < \gamma < h$ gilt

$$\log \left|\frac{\varrho_\nu + k}{\varrho + k}\right| \leqslant -\frac{1}{20 H^2} (\gamma^2 - \gamma_\nu^2).$$

Man erhält aus (1.3), (2.5) und (3.7)

$$|r_\nu| \leqslant \sum_{\substack{\beta=\beta_\nu, \gamma<H \\ \gamma_\nu<\gamma}} \exp\left\{-\frac{\log X}{2H^2}(\gamma^2 - \gamma_\nu^2)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\beta=\beta_\nu, \gamma<H \\ \gamma_\nu<\gamma<\gamma_\nu+1}} \exp\left\{-\frac{\log H}{H^2} \gamma_K g(H)\right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{\beta=\beta_\nu, \gamma<H \\ \gamma_\nu+j\leqslant\gamma<\gamma_\nu+j+1}} \exp\left\{-\frac{\log X}{2H^2} j\right\} \ll$$

$$\ll \mathscr{L}\left(\exp\left\{-\frac{\log X}{H^2} \gamma_K g(H)\right\} + \exp\left\{-\frac{\log X}{2H^2}\right\}\right),$$

sofern $\log X \geqslant H^2$ gilt, wobei

$$\mathscr{L} := \log(dH^n) \tag{3.8}$$

gesetzt wird.

Setzen wir nun voraus, daß

$$\log X \geqslant c_6 H^2 \log \mathscr{L}\left(1 + \frac{1}{\gamma_K g(H)}\right) \geqslant \log 2 \tag{3.9}$$

wobei $c_6 > 0$ genügend groß ist. Dann erhält man

$$|r_\nu| \leqslant 1/6 \quad (\nu = 0, \ldots, l). \tag{3.10}$$

Aus (1.4) und (3.1) folgt wegen $h \in (H-1, H)$

$$\log \frac{|\varrho_0 + k|}{k} = \tfrac{1}{2} \log\left(1 + \frac{2\beta_0 k + \beta_0^2 + \gamma_0^2}{k^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta_0}{k} + \frac{|\varrho_0|^2}{2k^2} \leqslant \frac{1}{k}\left(\beta_0 + \frac{3}{10}\right).$$

Hieraus und aus (1.1), (2.6), (3.6) und (3.7) erhält man

$$R_1 \ll (r \log X + \log^2(d+1)) \cdot$$

$$\cdot \exp\{(\log X)(-(18/k)\beta_0 + 10 \log|1 + \varrho_0/k|)\} \leqslant$$

$$\leqslant (r \log X + \log^2(d+1)) \exp\{-(\log X)/k\},$$

was zusammen mit (3.9)

$$|R_1| \leqslant 1/12 \tag{3.11}$$

ergibt. Mit

$$L_1 := \{s \in \mathbb{C}\colon \sigma = -1/10,\ 0 \leqslant t \leqslant h\},$$

$$L_2 := \{s \in \mathbb{C}\colon \sigma = 11/10,\ t \geqslant h\},$$

$$L_3 := \{s \in \mathbb{C}\colon -1/10 \leqslant \sigma \leqslant 11/10,\ t = h\}$$

folgt

$$|R_2| \leqslant R_{21} + R_{22} + R_{23}, \tag{3.12}$$

wobei

$$R_{2j} := \frac{|\varrho_0|}{2\pi} |\varrho_0 + k|^{m+1} x^{-\beta_0} \left|\int_{L_j} \Phi(s)\, ds\right| \quad (j = 1, 2, 3)$$

gesetzt wird. Aus (1.1), (1.4), (2.3), (3.1), (3.6) und (3.8) folgt wegen $h \in (H-1, H)$

$$R_{21} \ll \left|\frac{\varrho_0 + k}{-1/10 + k}\right|^m x^{-\beta_0 - 1/10} \int_0^h \left|-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(-1/10 + it)\right| \frac{dt}{|-1/10 + it|} \ll$$

$$\ll \{\mathscr{L} \log H\} \left\{\left|\frac{\varrho_0 + k}{k}\right|^m x^{-\beta_0}\right\} \left\{\left(\frac{k}{k - 1/10}\right)^m X^{-18/(10k)}\right\} =: K_1 K_2 K_3.$$

Auf Grund der vorigen Überlegungen und (3.9) wird $K_2 \leqslant$ $\leqslant \exp\{-(\log X)/k\}$ und $K_3 \leqslant 1$, und schließlich

$$R_{21} \leqslant 1/12. \tag{3.13}$$

Aus (1.1), (1.4), (2.2), (3.1), (3.7) folgt

$$R_{22} \ll n x^{11/10 - \beta_0} \left|\frac{\varrho_0 + k}{11/10 + ih + k}\right|^m |\varrho_0 + k| \left(\frac{1}{k} \int_h^k \frac{dt}{t} + \int_k^\infty \frac{dt}{t^2}\right) \ll$$

$$\ll n \frac{|\varrho_0 + k|}{k} x^{11/10 - \beta_0} \left|\frac{\varrho_0 + k}{11/10 + ih + k}\right|^m \ll$$

$$\ll n X^{11/10 - \beta_0} \left|\frac{\varrho_0 + k}{11/10 + ih + k}\right|^m,$$

und aus (1.1), (1.4), (2.4), (2.5), (3.1)—(3.3), (3.6)

$$R_{23} \ll \left(\max_{-1/10 \leqslant \sigma \leqslant 11/10} \left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma + ih)\right|\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{|\varrho_0 + k|}{h(k - 1/10)} x^{11/10 - \beta_0} \left|\frac{\varrho_0 + k}{-1/10 + ih + k}\right|^m \ll$$

$$\ll \log^2(d + 1) X^{11/10 - \beta_0} \left|\frac{\varrho_0 + k}{-1/10 + ih + k}\right|^m.$$

Nach einigen Rechnungen erhält man aus (1.1), (1.4) und (3.1) wegen $h \in (H - 1, H)$

$$11/10 - \beta_0 + 10 \log \left|\frac{\varrho_0 + k}{-1/10 + ih + k}\right| \leqslant -c_7,$$

wobei c_7 eine positive absolute Konstante bedeutet, z. B. $c_7 = 1/10$. Dies, zusammen mit (2.1) und (3.7), ergibt

$$R_{22} + R_{23} \ll \log^2(d + 1) X^{-c_7}.$$

Mit (3.7) wird daher

$$R_{22} + R_{23} \leqslant 1/6. \tag{3.14}$$

Nach (3.5) und (3.10)—(3.14) ist also:

$$A_{m+1}(\Delta_K)(x) = -2 \sum_{\nu=0}^{l} \frac{q_\nu x^{\beta_\nu}}{|\varrho_\nu| \, |\varrho_\nu + k|^{m+1}} (\cos \alpha_\nu(x) + r'_\nu)$$

mit

$$|r'_\nu| \leqslant 1/2 \quad (\nu = 0, \ldots, l).$$

Setze

$$u_\nu(\xi) := \beta_\nu \xi + \log q_\nu - \log|\varrho_\nu| - (m+1)\log|\varrho_\nu + k|$$

($\xi \in \mathbb{R}$; $\nu = 0, \ldots, l$). Sei $\eta > 0$ und $I := [(18/k)\log X, \log X]$. Nun werden die Intervalle

$$I_\nu := \{\xi \in I : u_\nu(\xi) \geqslant \max_{\mu \neq \nu} u_\mu(\xi) + \eta\}$$

eingeführt (im Fall $l = 0$ wird natürlich $I_0 := I$ gesetzt), vgl. [2, II].

Ist $\log x \in I_\nu$, so gilt

$$A_{m+1}(\Delta_K)(x) = -2\exp\{u_\nu(\log x)\}(\cos \alpha_\nu(x) + r'_\nu + r''_\nu)$$

mit

$$|r''_\nu| \leqslant \tfrac{3}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \exp\{u_\mu(\log x) - u_\nu(\log x)\}.$$

Auf Grund von (2.5) und (3.8) wird

$$|r''_\nu| \ll l\exp(-\eta) \ll H\mathscr{L}\exp(-\eta).$$

Wir setzen voraus

$$\eta := c_8 \log(H\mathscr{L})$$

und (3.15)

$$c_8 > 0 \textit{ ist genügend groß.}$$

Dann gilt die Beziehung:

$$A_{m+1}(\Delta_K)(x) = -2\exp\{u_\nu(\log x)\}(\cos \alpha_\nu(x) + R'_\nu)$$

mit

$$|R'_\nu| \leqslant 3/4 \quad (\log x \in I_\nu;\ \nu = 0, \ldots, l).$$

Mit der Bezeichnung $|J|$ für die Länge eines Intervalls J folgt daher

$$V(A_{m+1}(\Delta_K), X) \geqslant \sum_{\nu=0}^{l} \left(\frac{\gamma_\nu}{\pi}|I_\nu| - 2\right) \geqslant \frac{\gamma_K}{\pi} \sum_{\nu=0}^{l} |I_\nu| - 2(l+1). \tag{3.16}$$

Die Summe $\sum_{\nu=0}^{l} |I_\nu|$ ist nun groß genug zu machen, vgl. [2, II, S. 69f.] oder [4].

Es gilt

$$I \setminus \bigcup_{\nu=0}^{l} I_\nu \subset \bigcup_{\mu \neq \nu} J_{\mu,\nu},$$

wobei

$$J_{\mu,\nu} := \{\xi \in I : |u_\mu(\xi) - u_\nu(\xi)| < \eta\} \quad (\mu \neq \nu)$$

gesetzt wird. Da

$$|J_{\mu,\nu}| < \frac{2\eta}{|\beta_\mu - \beta_\nu|} \quad (\mu \neq \nu)$$

ist, folgt aus (1.2), (2.5), (3.8) und (3.15)

$$\sum_{\mu \neq \nu} |J_{\mu,\nu}| \leqslant 2\eta \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{|\beta_\mu - \beta_\nu|} \ll \frac{H^2 \mathscr{L}^2 \log(H\mathscr{L})}{b(H)}.$$

Wir setzen zusätzlich voraus

$$\log X \geqslant c_9 \frac{H^3 \mathscr{L}^2 \log(H\mathscr{L})}{b(H)} \geqslant \log 2$$

und (3.17)

$$c_9 > 0 \textit{ ist genügend groß.}$$

Dann wird

$$\sum_{\mu \neq \nu} |J_{\mu,\nu}| \leqslant \frac{\log X}{2k},$$

und daher

$$\sum_{\nu=0}^{l} |I_\nu| \geqslant \left(1 - \frac{18\frac{1}{2}}{k}\right) \log X. \tag{3.18}$$

Den Voraussetzungen (3.9) und (3.17) fügen wir noch eine hinzu:

$$\log X \geqslant c_{10} \frac{H^2 \mathscr{L}}{\gamma_K} \geqslant \log 2,$$

$$c_{10} > 0 \textit{ ist genügend groß.} \tag{3.19}$$

[Die Unabhängigkeit der Konstante c_{10} vom Zahlkörper K wird hier auch durch (1.1) gesichert.]

Aus (1.4), (2.5), (3.1), (3.8), (3.16) und (3.18) folgt schließlich wegen $h \in (H-1, H)$

$$V(A_{m+1}(\Delta_K), X) \geqslant \left(1 - \frac{19}{k}\right)\frac{\gamma_K}{\pi}\log X \geqslant \left(1 - \frac{10}{H}\right)\frac{\gamma_K}{\pi}\log X.$$

Andererseits gibt die Anwendung von [9, I, Lemma] (= [2, I, Lemma 1])

$$V(\Delta_K, X) \geqslant V(A_1(\Delta_K), X) \geqslant \ldots \geqslant V(A_{m+1}(\Delta_K), X) \quad (X > 0).$$

Daher gilt (1.6).

Wenn die Konstanten c_1, c_2 und c_3 in (1.5) genügend groß gewählt werden, so sind die Ungleichungen für $\log X$ in (3.9), (3.17) und (3.19) erfüllt. □

Literatur

[1] HOFFSTEIN, J.: Some results related to minimal discriminants. In: Number Theory, Carbondale 1979; 185—194. Lect. Notes Math. 751. Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1979.

[2] KACZOROWSKI, J.: On sign-changes in the remainder-term of the prime-number formula. I, II. Acta Arith. **44**, 365—377 (1984), ibid. **45**, 65—74 (1985).

[3] KACZOROWSKI, J., PINTZ, J.: Oscillatory properties of arithmetical functions. I, II. Acta Math. Hung. **48** (1—2), 173—185 (1986), ibid. **49** (3—4), 441—453 (1987).

[4] KACZOROWSKI, J., STAŚ, W.: On the number of sign-changes in the remainder-term of the prime-ideal theorem. Colloq. Math. **56**, 185—197 (1988).

[5] LAGARIAS, J. C., ODLYZKO, A. M.: Effective versions of the Chebotarev density theorem. In: Algebraic Number Fields, pp. 409—464. London–New York–San Francisco: Academic Press. 1977.

[6] LANDAU, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig: Teubner. 1927.

[7] NEUGEBAUER, A.: Every Dedekind zeta-function has a zero in the rectangle $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 < t < 60$. Discuss. Math. **7**, 141—144 (1985).

[8] SIEGEL, C. L.: Wurzeln Heckenscher Zetafunktionen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1972, Nr. 2, 11—20.

[9] SZYDŁO, B.: Über Vorzeichenwechsel einiger arithmetischer Funktionen. I, II. Math. Ann. **283**, 139—149 (1989), ibid **283**, 151—163 (1989).

B. SZYDŁO
Mathematisches Institut
Adam-Mickiewicz-Universität
ul. Matejki 48/49
PL-60-769 Poznań, Polen