Math. Ann. 283, 151–163 (1989)

Mathematische Annalen

Über Vorzeichenwechsel einiger arithmetischer Funktionen. II

Bogdan Szydło

Mathematisches Institut der Adam-Mickiewicz-Universität, ul. Matejki 48/49, PL-60-769 Poznań, Poland

1. Einleitung

In dem vorliegenden Artikel dieser Reihe wenden wir die allgemeine, in [12] eingeführte Methode auf die Untersuchung der Vorzeichenwechsel einer konkreten, für die Primzahltheorie wichtigen Funktion an. Die erwähnte Methode entwickelt das Verfahren von Kaczorowski [7, 8]. Die Hauptneuerung besteht generell darin, daß wir statt des Operators δ von Kaczorowski den allgemeineren **A** benutzen. Für eine genauere Schilderung der Methode, Bezeichnungen und einige allgemeine Ergebnisse s. [12].

Es sei ψ die Tschebyschevsche Funktion. Für das Restglied im Primzahlsatz in Gestalt

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$$

geschrieben, führen wir die Bezeichnung $\Delta(x) = \psi(x) - x$ und für die Anzahl der Vorzeichenwechsel von Δ im Intervall $(0, X]$ $(X > 0)$ die Bezeichnung $V(\Delta, X)$ ein.

Das Ziel dieses Artikels ist, die folgenden Sätze zu beweisen.

Satz 1. *Für* $X \geqq 10^{2250}$ *gilt*

$$V(\Delta, X) \geqq 0{,}013 \log X .$$

Satz 2. *Es sei* $H \geqq 501{,}5$. *Jede nichttriviale Nullstelle* $\varrho = \beta + i\gamma$ *der Riemannschen Zetafunktion* ζ, *die im Streifen* $|t| < H$ *liegt, genüge der Bedingung*

$$\beta = 1/2 .$$

Dann gilt für $X \geqq \exp(0{,}09 \max\{4400, H\})$ *die Ungleichung*

$$V(\Delta, X) \geqq \left(1 - \frac{3}{H}\right) \frac{\gamma_0}{\pi} \log X ,$$

wo $\gamma_0 = 14{,}13\ldots$ *den Imaginärteil der niedrigsten nichttrivialen Nullstelle* $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ *von* ζ *bezeichnet.*

Aus Satz 2 ziehen wir hier die unmittelbaren Folgerungen.

Folgerung 1. *Für* $X \geqq \exp(198594)$ *gilt*

$$V(\Delta, X) \geqq 0{,}994 \frac{\gamma_0}{\pi} \log X .$$

Beweis. Wir wenden Satz 2 mit $H = 501{,}5$ an; vgl. [13, S. 331]. □

Folgerung 2. *Für* $X \geqq \exp(9 \cdot 10^{14})$ *gilt*

$$V(\Delta, X) \geqq 0{,}99999997 \frac{\gamma_0}{\pi} \log X .$$

Beweis. Wir wenden Satz 2 mit $H = 10^8$ an; vgl. [9]. □

In dem Satz der Arbeit von Kaczorowski [7, I] finden wir das Resultat

$$V(\Delta, X) \geqq \frac{\gamma_0}{4\pi} \log X \qquad (X \geqq X_0), \tag{1.1}$$

wo X_0 eine effektive, aber dort nicht berechnete Konstante bedeutet. Abgesehen von der explizit berechneten unteren Schranke X_0 für X, ist Satz 1 schwächer und Folgerung 1 besser als (1.1). Im Gegensatz zu (1.1) sind aber diese Ergebnisse ganz „komputerfrei", während in [7, I] man die Lokalisation der nichttrivialen Nullstellen von ζ bis zur Höhe $H = 10^6$ benutzt, was umfangreiche Komputerrechnungen verlangte.

Ferner bemerken wir, daß die Anwendung des Operators δ, wie es in [7, 8] gemacht wird, die Lokalisation von wenigstens einigen tausend nichttrivialen Nullstellen von ζ erfordert, um überhaupt ein Resultat vom Typus

$$V(\Delta, X) \geqq c \log X \qquad (X \geqq X_0)$$

mit effektiven (explizit gegebenen) Konstanten $c > 0$ und $X_0 \geqq 2$ geben zu können.

Die Beweismethode von Satz 1 ist einerseits das erste Beispiel für eine konkrete Wirkung der in Artikel I dieser Reihe präsentierten Methode. Anderseits benutzt man während des Beweises bescheidene Information über die zwei niedrigsten Nullstellen $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ und $\varrho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ von ζ. Wir werden uns nämlich nur darauf stützen, daß ϱ_0 eine einfache Nullstelle und

$$\beta_0 = 1/2, \tag{1.2}$$

$$14{,}13 \leqq \gamma_0 \leqq 14{,}14, \tag{1.3}$$

$$21 \leqq \gamma_1 \tag{1.4}$$

ist; vgl. [4], auch [2, 11] für die Geschichte der numerischen Bestimmung der Nullstellen von ζ. Es ist zuzugeben, daß Satz 1 gerade das leistet, was bereits der allgemeine Satz aus Artikel I im Spezialfall antizipiert.

Da die Riemannsche Vermutung bis zu sehr großen H verifiziert ist (und wird), wird Satz 2 zur Grundlage solcher Ergebnisse wie Folgerung 2.

Hilfssätze 4, 5 und 6 sind keine vollkommen originalen Resultate, denn in den Beweisen benutzen wir bekannte klassische Argumente, die z. B. in [1, §§ 13, 15, 17] zu finden sind. Die notwendigen Werte der zumeist im Symbol $O(\cdot)$ implizierten numerischen Konstanten sind jedoch unsere Produkte.

Abschließend erwähnen wir, daß bei der Aufgabe, analoge (effektive) Resultate für $V(\Delta_1, X)$ zu geben, wo $\Delta_1(x) = \pi(x) - \mathrm{li}(x)$ $(x > 0)$ das Restglied im Primzahlsatz in Gestalt $\lim_{x \to \infty} \pi(x)/\mathrm{li}(x) = 1$ bezeichnet, die Methode versagt; vgl. jedoch [7].

Bemerkung zur Bezeichnung. In diesem Artikel bezeichnet $\varrho=\beta+i\gamma$ ($\beta,\gamma\in\mathbb{R}$) eine nichttriviale Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion ζ; außerdem behalten wir die Bezeichnungen von [12] bei.

2. Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Für* $1<\sigma\leqq 2$ *gilt*

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\leqq\frac{1}{\sigma-1}. \tag{2.1}$$

Beweis. Für den Fall $1<\sigma\leqq 1{,}5$ findet sich ein Beweis von (2.1) in [3, S. 184f.]. Bemerken wir, daß die dort angegebene Überlegung auch zum Fall $1{,}5\leqq\sigma\leqq 2$ verwendbar ist. □

Hilfssatz 2 (Poisson, vgl. [10, S. 181f.]). *Für* $\sigma>0$ *gilt*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)=\log s-\frac{1}{2s}-2\int_0^\infty\frac{\tau\,d\tau}{(\tau^2+s^2)(e^{2\pi\tau}-1)}.$$

Hilfssatz 3. *Es gilt*

$$I=\int_0^\infty\frac{\tau\,d\tau}{e^{2\pi\tau}-1}\leqq\frac{1}{8}.$$

Beweis. Spalte auf

$$\begin{aligned}I&=\left(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_0}^\infty\right)\frac{\tau\,d\tau}{e^{2\pi\tau}-1}\leqq\int_0^{\tau_0}\frac{\tau\,d\tau}{2\pi\tau}+\int_0^\infty\frac{3!\,\tau\,d\tau}{(2\pi\tau)^3}\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\tau_0+\frac{1}{2\pi^2\tau_0}\right)\end{aligned}$$

und wähle $\tau_0=\sqrt{6}/(2\pi)$. □

Hilfssatz 4. *Für* $h\geqq 1$ *gilt*

$$\max_{0\leqq t\leqq h}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+ih)\right|\leqq\log h+8.$$

Beweis. Die Funktionalgleichung von ζ, in der asymmetrischen Gestalt [1, S. 73]

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

geschrieben, gibt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s)=\log 2\pi+\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)-\frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

Weiter setzen wir $s=2+it$ und benutzen die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it)\right|&=\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1-it)\right|\\&\leqq\log 2\pi+\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\}+\frac{\pi}{2}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(2+it)\right)\right|+\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+it)\right|.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Um das letzte Glied in der rechten Seite dieser Ungleichung abzuschätzen, verwenden wir Hilfssätze 2 und 3. Für $t \geqq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+it)\right| \\ &\quad \leqq \log|2+it| + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2|2+it|} + 2\int_0^\infty \frac{\tau\, d\tau}{|\tau^2+s^2|(e^{2\pi\tau}-1)} \\ &\quad \leqq \log t + \log 5 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{I}{2t} \leqq \log t + 3{,}47\,,\end{aligned}$$

für $t \in [0,1]$ dagegen

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+it)\right| \leqq \log\sqrt{5} + \operatorname{arc\,tg} 0{,}5 + 0{,}25 + \frac{2I}{3} \leqq 2\,.$$

Aus (2.1) und (2.2) bekommen wir daher für $h \geqq 1$

$$\begin{aligned}\max_{0\leqq t\leqq h}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it)\right| &\leqq \log h + 3{,}47 + \log 2 + 1 + \frac{\pi}{2} \\ &\leqq \log h + 8\,. \quad \square\end{aligned}$$

Hilfssatz 5. *Für* $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ *und* $t \geqq 20$ *gilt*

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leqq \left|\sum_{|\gamma-t|\leqq 1/2} \frac{1}{s-\varrho}\right| + 2{,}6\log t\,.$$

Beweis. Man hat [1, S. 80ff.]

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{\log\pi}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) - \sum_{\varrho}\frac{1}{s-\varrho}. \tag{2.3}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\left|-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| &\leqq \left|-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)\right| + \left|-\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)\right| \\ &\leqq \left|\sum_{|\gamma-t|<1/2}\frac{1}{s-\varrho}\right| + \left|\sum_{|\gamma-t|<1/2}\frac{1}{2+it-\varrho}\right| \\ &\quad + \sum_{|\gamma-t|\geqq 1/2}\left|\frac{1}{s-\varrho}-\frac{1}{2+it-\varrho}\right| + \left|\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2+it-1}\right| \\ &\quad + \frac{1}{2}\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2+it}{2}+1\right)\right| + \left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Für $|\gamma-t| \geqq 1/2$ gilt

$$\left|\frac{1}{s-\varrho}-\frac{1}{2+it-\varrho}\right| \leqq 3\sqrt{3}\,\mathrm{Re}\frac{1}{2+it-\varrho},$$

für $|\gamma-t|<1/2$ ist auch

$$\left|\frac{1}{2+it-\varrho}\right| \leqq 3\sqrt{3}\,\mathrm{Re}\frac{1}{2+it-\varrho}.$$

Aber aus (2.3) folgt

$$\operatorname{Re}\sum_{\varrho}\frac{1}{2+it-\varrho}$$

$$\leqq\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\}-\frac{\log\pi}{2}+\operatorname{Re}\frac{1}{2+it-1}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2+it}{2}+1\right), \tag{2.5}$$

und daher bekommt man aus (2.4)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leqq & \left|\sum_{|\gamma-t|<1/2}\frac{1}{s-\varrho}\right|+\frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(2+\frac{it}{2}\right)\\ &+(3\sqrt{3}+1)\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\log\pi\\ &+\frac{1}{2}\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(2+\frac{it}{2}\right)\right|+\left|\frac{1}{s-1}-\frac{1}{1+it}\right|\\ &+3\sqrt{3}\operatorname{Re}\frac{1}{1+it}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Mit der Beweismethode von Hilfssatz 1 [3, S. 184f.] und unter Berücksichtigung von [1, S. 81, (10)] erhält man leicht

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\leqq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\log\pi+C),$$

wobei $C=0{,}577215\ldots$ die Eulersche Konstante bedeutet.

Um die Behauptung des Hilfssatzes zu bekommen, schätzt man jetzt unter Verwendung von Hilfssätzen 2 und 3 die rechte Seite von (2.6) genug scharf ab. □

Hilfssatz 6. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 bezeichne $N^*(T)$ die Anzahl der nichttrivialen Nullstellen von ζ im Streifen $T-1/2<t<T+1/2$, wobei $500\leqq T\leqq H-1/2$ ist. Dann gilt*

$$N^*(T)\leqq\tfrac{5}{6}\log T.$$

Beweis. Wenn $\beta=1/2$ und $|\gamma-T|<1/2$ ist, so gilt

$$\frac{6}{10}\leqq\operatorname{Re}\frac{1}{2+iT-\varrho}.$$

Also erhält man

$$N^*(T)\leqq\frac{10}{6}\operatorname{Re}\sum_{\varrho}\frac{1}{2+iT-\varrho},$$

nach (2.5) ist dies

$$\leqq\frac{10}{6}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(2)-\frac{\log\pi}{2}+\operatorname{Re}\frac{1}{1+iT}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(2+\frac{iT}{2}\right)\right\}\leqq\frac{5}{6}\log T. \quad \square$$

3. Beweis von Satz 1

Auf dieselbe Weise wie im Beweis des Satzes aus [12] führen wir den Operator **A** ein, dessen Einwirkung auf eine reelle Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{A}(f)(x)=x^{-k}\int_0^x f(\xi)\xi^{k-1}\,d\xi \qquad (x>0) \tag{3.1}$$

definiert wird, falls f und $k\geqq 0$ geeigneten Bedingungen genügen.

Setzen wir

$$k=1000 \tag{3.2}$$

und bezeichnen mit $A_n(f)$ das Ergebnis der n-fachen Iteration des Operators **A**.

Da

$$\mathfrak{M}(\psi)(s)=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{1}{s}$$

ist, so folgt

$$A_{n+1}(\psi)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+\infty}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right\}\frac{x^s\,ds}{s(s+k)^{n+1}} \tag{3.3}$$

für $\sigma_1>1$, $n\geqq 1$, $x>0$; vgl. den Anfang des Beweises des Satzes aus [12], insbesondere (4.2).

Es seien

$$\sigma_0=-1,\ \sigma_1=1{,}01,\ h=20{,}5 \tag{3.4}$$

und bezeichne

$$D=\{s\in\mathbb{C}:\sigma_0\leqq\sigma\leqq\sigma_1,|t|\leqq h\}\cup\{s\in\mathbb{C}:\sigma\geqq\sigma_1\}, \tag{3.5}$$

außerdem

$$\alpha_1=\operatorname{Arg}\varrho_0,\ \alpha_2=\operatorname{Arg}(\varrho_0+k). \tag{3.6}$$

Bekanntlich ist [2, S. 66, (1)]

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(0)=\log 2\pi. \tag{3.7}$$

Da ϱ_0 eine einfache Nullstelle von ζ ist, schließen wir aus dem Residuensatz und (1.2)–(1.4), (3.3)–(3.7), daß

$$\begin{aligned}A_{n+1}(\Delta)(x)&=-2\operatorname{Re}\frac{x^{\varrho_0}}{\varrho_0(\varrho_0+k)^{n+1}}-\frac{\log 2\pi}{k^{n+1}}\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right\}\frac{x^s\,ds}{s(s+k)^{n+1}}\\&=-2\frac{x^{1/2}}{|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|^{n+1}}\{\cos(\gamma_0\log x-\alpha_1-(n+1)\alpha_2)+R_1+R_2\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

stattfindet, wobei

$$|R_1|\leqq\frac{\log(2\pi)}{2}|\varrho_0|x^{-1/2}\left|\frac{\varrho_0+k}{k}\right|^{n+1} \tag{3.9}$$

und

$$|R_2| \leqq \frac{|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|^{n+1}}{4\pi}\left|\int_{\partial D}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right\}\frac{x^{s-1/2}\,ds}{s(s+k)^{n+1}}\right| \tag{3.10}$$

ist.

Ferner setzen wir voraus

$$X \geqq 2 \quad \text{und} \quad X^{0,997} \leqq x \leqq X. \tag{3.11}$$

Wir wählen

$$n = [830 \log X] + 1. \tag{3.12}$$

Im folgenden benutzen wir die für $|s| \leqq 0{,}2$ geltende Beziehung:

$$\log|1+s| = \sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma^2 - t^2) + \tfrac{1}{3}(\sigma^3 - 3\sigma t^2) + R \tag{3.13}$$

mit

$$|R| \leqq 0{,}3\,|s|^4.$$

Zuerst beschäftigen wir uns mit R_1. Auf Grund (1.2), (1.3), (3.2) und (3.13) erhalten wir

$$\begin{aligned}\log\left|1+\frac{\varrho_0}{k}\right| &\leqq \frac{\beta_0}{k} + \frac{1}{2k^2}(\gamma_0^2 - \beta_0^2) + \frac{1}{3k^3}(\beta_0^3 - 3\beta_0\gamma_0^2)\\ &\quad + \frac{0{,}3}{k^4}(\beta_0^2 + \gamma_0^2)^2\\ &\leqq \frac{0{,}5}{k} + \frac{100}{k^2} = \frac{0{,}6}{k} \leqq 0{,}0006.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Hieraus und aus (3.11), (3.12) folgt

$$|R_1| \leqq 13{,}1\,X^{-0{,}0005}. \tag{3.15}$$

Mit (vgl. [12, (4.5)])

$$\begin{aligned}L_1 &= \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \sigma_0,\, 0 \leqq t \leqq h\},\\ L_2 &= \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \sigma_1,\, t \geqq h\},\\ L_3 &= \{s \in \mathbb{C} : \sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1,\, t = h\}\end{aligned} \tag{3.16}$$

folgt

$$|R_2| \leqq R_{21} + R_{22} + R_{23}, \tag{3.17}$$

wobei

$$R_{2j} := \frac{1}{2\pi}|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|^{n+1}\left|\int_{L_j}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right\}\frac{x^{s-1/2}\,ds}{s(s+k)^{n+1}}\right| \quad (j=1,2,3) \tag{3.18}$$

gesetzt wird.

Es ist

$$\left|\int_{L_1}\right| \leqq \max_{0 \leqq t \leqq h}\left|-\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it)\right|(1+\log h)\frac{x^{-3/2}}{(k-1)^{n+1}}.$$

Analog wie vorher schätzen wir ab:

$$\log\left|1-\frac{1}{k}\right| \geqq -\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}-\frac{0{,}3}{k^4} \geqq -\frac{1}{k}-\frac{0{,}501}{k^2} \geqq -\frac{1{,}001}{k}, \tag{3.19}$$

was zusammen mit (3.14) gibt

$$\log\left|\frac{\varrho_0+k}{k-1}\right| \leqq \frac{1{,}601}{k} \leqq 0{,}002\,.$$

Hieraus, aus Hilfssatz 4, zusammen mit (3.11) und (3.12), folgt

$$R_{21} \leqq 110X^{-0{,}16667}. \tag{3.20}$$

Aus Hilfssatz 1 folgt weiter

$$\left|\int_{L_2}\right| \leqq \left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(1{,}01)\right\}\left(\frac{1}{k}\int_h^k\frac{dt}{t}+\int_k^\infty\frac{dt}{t^2}\right)\frac{x^{0{,}51}}{|\sigma_1+ih+k|^n}$$
$$\leqq \frac{100(1+\log(k/h))}{k}\,\frac{x^{0{,}51}}{|\sigma_1+ih+k|^n}.$$

Überdies ist

$$\log\left|1+\frac{\sigma_1+ih}{k}\right| \geqq \frac{\sigma_1}{k}+\frac{1}{2k^2}(h^2-\sigma_1^2)+\frac{1}{3k^3}(\sigma_1^3-3\sigma_1h^2)$$
$$-\frac{0{,}3}{k^4}(\sigma_1^2+h^2)^2$$
$$\geqq \frac{1{,}01}{k}+\frac{209}{k^2} \geqq \frac{1{,}219}{k},$$

was zusammen mit (3.14) gibt

$$\log\left|\frac{\varrho_0+k}{\sigma_1+ih+k}\right| \leqq -\frac{0{,}619}{k},$$

also

$$R_{22} \leqq 1150X^{-0{,}00377}. \tag{3.21}$$

Es bleibt noch übrig, das Integral $\int_{L_3}$ zu betrachten. Es ist

$$\left|\int_{L_3}\right| \leqq \max_{\sigma_0\leqq\sigma\leqq\sigma_1}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+ih)\right|\frac{1}{h(k-1)}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\frac{x^{\sigma-1/2}\,d\sigma}{|\sigma+ih+k|^n}.$$

Für $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ ist

$$\log\left|1+\frac{\sigma+ih}{k}\right| \geqq \frac{\sigma}{k}+\frac{1}{2k^2}(h^2-\sigma^2)+\frac{1}{3k^3}(\sigma^3-3\sigma h^2)$$
$$-\frac{0{,}3}{k^4}(\sigma^2+h^2)^2$$
$$\geqq \frac{\sigma}{k}+\frac{209}{k^2},$$

was zusammen mit (3.14) gibt

$$\log\left|\frac{\varrho_0+k}{\sigma+ih+k}\right| \leqq \frac{1/2-\sigma}{k} - \frac{109}{k^2}.$$

Es ist leicht nachzusehen, daß für $X \geqq 2$ die Ungleichung

$$X^{0,997} \geqq \exp(n/k)$$

gilt. Außerdem stellen wir auf Grund von Hilfssatz 5 und (1.3), (1.4) fest, daß

$$\max_{\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+ih)\right| \leqq 2{,}6 \log h$$

gilt. Nach diesen Vorbereitungen bekommen wir die Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} R_{23} &\leqq \frac{2{,}6|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|\log h}{2\pi h(k-1)}\left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\frac{x}{\exp(n/k)}\right)^{\sigma-1/2} d\sigma\right) X^{-0{,}109\cdot 0{,}83} \\ &\leqq \frac{2{,}6 \cdot 2{,}01\,|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|\log h}{2\pi h(k-1)}\left(\frac{X}{\exp(n/k)}\right)^{0{,}51} X^{-0{,}09047} \\ &\leqq 2X^{-0{,}00377}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Aus (3.15), (3.17), (3.20)–(3.22) erhalten wir schließlich

$$|R_1+R_2| \leqq 13{,}1\,X^{-0{,}0005} + 110X^{-0{,}16667} + 1200X^{-0{,}00377}.$$

Für $X \geqq 10^{2250}$ ist also

$$|R_1+R_2| \leqq 0{,}99.$$

Auf gleiche Weise wie im Beweis des Satzes aus [12] schließen wir unsere Überlegungen. □

4. Beweis von Satz 2

Der Beweis wird analog dem vorhergehenden verlaufen. Insbesondere führen wir wieder den Operator A ein [s. (3.1)], was verlangt, den Wert des Parameters k zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzen wir

$$k = 2h, \tag{4.1}$$

wobei h noch folgendermaßen zu wählen ist:

h liegt im Intervall $(H-1{,}5,\ H-0{,}5)$ und genügt der Bedingung:

$$|h-\gamma| \geqq \frac{1}{2(N^*(H-1)+1)} \tag{4.2}$$

für jede nichttriviale Nullstelle $\varrho = \beta + i\gamma$ von ζ.

Die Bedeutung von $N^*(H-1)$ wurde in Hilfssatz 6 angegeben. Es ist

$$k \geqq 1000. \tag{4.3}$$

Ferner findet die zu (3.8) analoge „explizite Formel“

$$A_{n+1}(\Delta)(x)=\frac{-2x^{1/2}}{|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|^{n+1}}\{\cos(\gamma_0\log x-\alpha_1-(n+1)\alpha_2)$$
$$+R_1+R_2+R_3\} \tag{4.4}$$

statt, wobei wir die Werte $\sigma_0=-1$, $\sigma_1=1{,}01$, die Bezeichnungen (3.5), (3.6) und (3.16), den Sinn von R_1, R_2 [s. (3.8)–(3.10)], und auch von R_{2j} [s. (3.17), (3.18)], mit den eben eingeführten k und h, beibehalten, und wo

$$|R_3|\leqq|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|^{n+1}\sum_{\gamma_1\leqq\gamma<h}\frac{1}{|\varrho|\,|\varrho+k|^{n+1}} \tag{4.5}$$

ist.

Für $X\geqq 2$ setzen wir

$$n=\left[\frac{5{,}76}{1+99/h}\log X\right]+1$$

und beschränken den Bereich für x wie folgt:

$$X^{2,9/h}\leqq x\leqq X. \tag{4.6}$$

Wegen (4.1) und (4.3) können wir die im vorhergehenden Beweis angegebenen Abschätzungen und Rechnungen auswerten.

Aus (3.14) und (4.1) folgt insbesondere

$$\log\left|1+\frac{\varrho_0}{k}\right|\leqq\frac{0{,}5}{k}+\frac{100}{k^2}=\frac{0{,}25}{h}+\frac{25}{h^2}\leqq 0{,}0006. \tag{4.7}$$

Somit ist

$$|R_1|\leqq\frac{\log(2\pi)}{2}|\varrho_0|\exp(0{,}0012)$$
$$\cdot\exp\left\{\left(\frac{-1{,}45}{h}+\left(\frac{0{,}25}{h}+\frac{25}{h^2}\right)\frac{5{,}76}{1+99/h}\right)\log X\right\}$$
$$\leqq 13{,}1\,X^{-0,01/h+1,5/(h^2)}. \tag{4.8}$$

Aus (3.19) und (4.7) folgt

$$\log\left|\frac{\varrho_0+k}{k-1}\right|\leqq\frac{0{,}75}{h}+\frac{25{,}2}{h^2}\leqq 0{,}002,$$

also

$$R_{21}\leqq\frac{|\varrho_0|(\log h+8)(\log h+1)\exp(0{,}004)}{2\pi}$$
$$\cdot\exp\left\{\left(\frac{-1{,}5\cdot 2{,}9}{h}+\left(\frac{0{,}75}{h}+\frac{25{,}2}{h^2}\right)\frac{5{,}76}{1+99/h}\right)\log X\right\}$$
$$\leqq 2{,}3(\log h+8)^2\,X^{-0,03/h}. \tag{4.9}$$

Im folgenden benötigen wir die für $|\sigma| \leqq 0{,}002$ und $|t| \leqq 0{,}5$ geltende Ungleichung

$$\log|1+s| \geqq \sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma^2 - t^2) + \tfrac{1}{3}(\sigma^3 - 3\sigma t^2) - 0{,}3|s|^4. \tag{4.10}$$

Unter Verwendung dieser Beziehung bekommt man

$$\begin{aligned}\log\left|1+\frac{\sigma_1+ih}{k}\right| &\geqq \frac{\sigma_1}{k} + \frac{1}{2k^2}(h^2-\sigma_1^2) + \frac{1}{3k^3}(\sigma_1^3 - 3\sigma_1 h^2) \\ &\quad - \frac{0{,}3}{k^4}(\sigma_1^2+h^2)^2 \\ &\geqq \frac{0{,}7575}{k} + 0{,}1062.\end{aligned}$$

Hieraus und aus (4.7) folgt

$$\log\left|\frac{\varrho_0+k}{\sigma_1+ih+k}\right| \leqq -\frac{0{,}2525}{k} + \frac{100}{k^2} - 0{,}1062 \leqq -0{,}1062,$$

weil $k \geqq 100/0{,}2525$ ist. Somit ist

$$\begin{aligned}R_{22} &\leqq \frac{100|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|(1+\log 2)}{2\pi k}\exp\left\{\log X\left(0{,}51 - \frac{0{,}1062\cdot 5{,}76}{1+99/h}\right)\right\} \\ &\leqq 390\,X^{-0{,}0006}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Für $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ ist

$$\log\left|1+\frac{\sigma+ih}{k}\right| \geqq \frac{\sigma}{2h} - \frac{0{,}12625}{h} + 0{,}1062,$$

was zusammen mit (4.7) gibt

$$\log\left|\frac{\varrho_0+k}{\sigma+ih+k}\right| \leqq \frac{1/2-\sigma}{2h} + \frac{0{,}2}{h} - 0{,}1062.$$

Aus (4.2), Hilfssatz 5 und 6 folgt

$$\max_{\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+ih)\right| \leqq 2{,}3\log^2 H.$$

Für

$$X \geqq \exp(25) \tag{4.12}$$

gilt

$$X^{2{,}9/h} \geqq \exp(n/(2h)).$$

Nach diesen Vorbereitungen, (4.12) vorausgesetzt, erhalten wir

$$\begin{aligned}R_{23} &\leqq \frac{2{,}3\log^2 H|\varrho_0|\,|\varrho_0+k|}{2\pi h(k-1)}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\frac{x}{\exp(n/(2h))}\right)^{\sigma-1/2} d\sigma \\ &\quad\cdot\exp\left\{\log X\left(\frac{0{,}2}{h} - 0{,}1062\right)\frac{5{,}76}{1+99/h}\right\} \\ &\leqq X^{-0{,}0006}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Betrachten wir endlich R_3, s. (4.5). Zu diesem Zweck benötigen wir die folgende, für $\gamma_1 \leqq \gamma < h$ gleichmäßige Abschätzung:

$$\log\left|\frac{1+\varrho_0/k}{1+\varrho/k}\right| \leqq \frac{1}{2k^2}(\gamma_0^2-\gamma^2)+\frac{1}{2k^3}(\gamma^2-\gamma_0^2)$$
$$+\frac{0{,}3}{k^4}((1/4+\gamma^2)^2+(1/4+\gamma_0^2)^2)$$
$$\leqq -\frac{0{,}394}{2k^2}(\gamma^2+1/4),$$

die man aus (1.3), (1.4), (3.13) und (4.10) herleiten kann. Man hat auch [2, S. 159f.]

$$2\sum_{\gamma \geqq \gamma_1}\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \leqq 0{,}0182\,.$$

Also ist

$$|R_3| \leqq |\varrho_0/\varrho_1| \sum_{\gamma_1 \leqq \gamma < h} \exp\left\{\frac{-0{,}394n}{8h^2}(\gamma^2+1/4)\right\}$$
$$\leqq \frac{8|\varrho_0|h^2}{0{,}394|\varrho_1|n}\,2\sum_{\gamma_1 \leqq \gamma}\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}$$
$$\leqq \frac{8(1+99/h)0{,}0182|\varrho_0|}{0{,}394\cdot 5{,}76|\varrho_1|}\,\frac{h^2}{\log X} \leqq \frac{0{,}06h^2}{\log X}\,. \tag{4.14}$$

Aus (3.17), (4.8), (4.9), (4.11), (4.13) und (4.14) folgt schließlich

$$|R_1+R_2+R_3| \leqq 13{,}1\,X^{-0{,}01/h+1{,}5/(h^2)}+2{,}3(\log h+8)^2 X^{-0{,}03/h}$$
$$+400X^{-0{,}0006}+\frac{0{,}06h^2}{\log X}\,. \tag{4.15}$$

Setzen wir voraus

$$\log X \geqq 0{,}09\max\{4400, H\}H\,.$$

Dann ist die Bedingung (4.12) erfüllt, und aus (4.15) erhält man

$$|R_1+R_2+R_3| \leqq 0{,}97\,.$$

Dies hat zur Folge [s. (4.4) und (4.6)]

$$V(A_{n+1}(\Delta), X) \geqq \left(1-\frac{2{,}9}{h}\right)\frac{\gamma_0}{\pi}\log X - 2 \geqq \left(1-\frac{3}{H}\right)\frac{\gamma_0}{\pi}\log X\,.$$

Auf gleiche Weise wie im Beweis des Satzes aus [12] schließen wir unsere Überlegungen. □

Danksagungen. Artikel I und II dieser Reihe bilden eine verbesserte Version eines Teils meiner Doktorarbeit. Herrn Professor Włodzimierz Staś danke ich herzlich für wissenschaftliche Leitung. Mein Dank gilt auch Jerzy Kaczorowski für eine Reihe von wertvollen Bemerkungen. Dem anonymen Referenten, der zahlreiche Verbesserungen vorgeschlagen hat, bin ich besonders verpflichtet.

Literatur

1. Davenport, H.: Multiplicative number theory. 2nd. ed. (revised by H. L. Montgomery). Berlin Heidelberg New York: Springer 1980
2. Edwards, H.M.: Riemann's zeta function. New York London: Academic Press 1974
3. Ellison, W.J. (en collaboration avec M. Mendès France): Les nombres premiers. Paris: Hermann 1975
4. Gram, J.-P.: Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Acta Math. **27**, 289–304 (1903)
5. Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications 1972
6. Handbook of tables for mathematics. Revised 4th ed. Cleveland, Ohio: CRS-Press 1975
7. Kaczorowski, J.: On sign-changes in the reminder-term of the prime-number formula. I. II. Acta Arith. **44**, 365–377 (1984), ibid. **45**, 65–74 (1985)
8. Kaczorowski, J., Pintz, J.: Oscillatory properties of arithmetical functions. I. Acta Math. Hung. **48** (1–2), 173–185 (1986)
9. van de Lune, J., te Riele, H.J.J.: On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. III. Math. Comput. **41**, 759–767 (1983)
10. Nielsen, N.: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig: Teubner 1906
11. Siegel, C.L.: Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien **2**, 45–80 (1932)
12. Szydło, B.: Über Vorzeichenwechsel einiger arithmetischer Funktionen. I. Math. Ann. **283**, 139–149 (1988)
13. Titchmarsh, E.C.: The theory of the Riemann zeta function. Oxford: Clarendon Press 1951

Eingegangen am 29. Oktober 1987; revidierte Fassung am 31. Mai 1988