Math. Ann. 283, 139–149 (1989)

Mathematische Annalen

Über Vorzeichenwechsel einiger arithmetischer Funktionen. I

Bogdan Szydło

Mathematisches Institut der Adam-Mickiewicz-Universität, ul. Matejki 48/49, PL-60-769 Poznań, Poland

1. Einleitung

Viele interessante, mit der Oszillation des Restgliedes $\Delta_1(x)=\pi(x)-\mathrm{li}(x)$ im Primzahlsatz

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)/\mathrm{li}(x)=1$$

verknüpfte Untersuchungen haben ihren Ursprung in der bahnbrechenden Arbeit von Riemann „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [6, S. 145–153]. Durch einige Riemannsche Bemerkungen angeregt, vermutete man beispielsweise, daß

$$\pi(x)<\mathrm{li}(x)$$

stets ist. Im Jahr 1914 zeigte aber Littlewood [5], daß Δ_1 sogar unendlich viele Vorzeichenwechsel hat, und daher erwies sich die oben erwähnte Vermutung als falsch. Die Aufgabe, solch einen Vorzeichenwechsel anzugeben, ist leider bisher ungelöst, vgl. [4].

Die Untersuchung der Größenordnung der Funktion $V_1(X)$, die die Anzahl der Vorzeichenwechsel von Δ_1 im Intervall $(0, X]$ $(X\geqq 0)$ angibt, ist ein für die analytische Zahlentheorie wesentliches Problem. Da man einen Abriß der Geschichte der betreffenden Forschungen z.B. in [2, 3] finden kann, beschränken wir uns hier darauf, die folgende kurze „Zeittafel“ der Mathematiker, die bisher die bedeutendsten Ergebnisse erhalten haben, auszuschreiben:

Riemann, Littlewood, Pólya, Ingham, Turán, Knapowski, Pintz, Kaczorowski.

Das beste Resultat, hier in etwas schwächerer Form geschrieben, gehört Kaczorowski [2]:

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{V_1(X)}{\log X}>0. \tag{1.1}$$

Zur Grundlage seiner Methode macht er die Anwendung des Operators δ, dessen Einwirkung auf eine Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ durch

$$\delta(f)(x)=\int_0^x f(\xi)\frac{d\xi}{\xi} \qquad (x>0) \tag{1.2}$$

definiert wird, falls das Integral in der rechten Seite von (1.2) existiert. Genügt nun eine Funktion f gewissen Bedingungen und bezeichnet F ihre Mellinsche Transformation (s. §2), so gilt

$$\delta(f)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} F(s)\frac{x^s}{s}\,ds \qquad (x>0). \tag{1.3}$$

Bezeichnet ferner $V(f,X)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel von f im Intervall $(0,X]$ $(X>0)$, so gibt die Anwendung des Lemmas (§3)

$$V(f,X)\geqq V(\delta(f),X) \qquad (X>0).$$

Statt sich direkt mit f zu beschäftigen, kann man also die gebildete Funktion $\delta(f)$ betrachten, deren oszillatorischer Charakter, durch die gegenseitige Stellung der Pole der Transformation F determiniert, leichter untersucht wird, denn im Integral in der rechten Seite von (1.3) kommt der zusätzliche, die Konvergenz verstärkende Faktor $1/s$ vor. Die geeignete Iteration des Operators δ ist auch eine wesentliche Etappe der Methode von Kaczorowski, die hier nur skizziert wird; vgl. [2, 3].

In vielen für die Theorie der Primzahlverteilung wichtigen konkreten Fällen führt die Anwendung des oben geschilderten Verfahrens zu Ergebnissen vom Typus

$$V(f,X)\geqq c\log X \qquad (X\geqq X_0), \tag{1.4}$$

wo $c>0$ und $X_0\geqq 2$ effektive Konstanten sind (im Gegensatz zu denjenigen, von denen man nur die Existenz aussagt).

Der erste Artikel dieser Reihe präsentiert eine Modifikation der Methode von Kaczorowski. Wir wenden nämlich statt des Operators δ einen allgemeineren $\mathbf{A}$ an:

$$\mathbf{A}(f)(x)=x^{-d-k}\int_0^x f(\xi)\xi^{d+k-1}\,d\xi \qquad (x>0), \tag{1.5}$$

wo d und k Parameter sind, vgl. (1.2).

Die geeignete Einführung dieser Parameter ist nämlich die Hauptneuerung (aber auch die Hauptschwierigkeit), die im Vergleich zu der originalen Ausgangsgestalt der Methode zur Verschärfung (in Hinsicht auf $c>0$) effektiver Resultate vom Typus (1.4) führt. Grob gesagt, geschieht das, weil unsere Modifikation gegebene Information über die Mellinsche Transformation F von f in wirksamerer Weise benutzt.

Das Hauptresultat des Artikels lautet (s. §2 für die Bezeichnungen):

Satz. *Es sei* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *eine stückweise stetige, in keinem Intervall* $(a,b)\subset(0,\infty)$ *konstante Funktion. Ferner sei* $F=\mathfrak{M}(f)$ *ihre Mellinsche Transformation, wobei es ein* $\varepsilon>0$ *derart gibt, daß*

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{-s-1}\,dx$$

für $\sigma>\sigma_1-\varepsilon$ *absolut konvergiert.* F *sei eine in* $D\setminus\{\varrho_1,\bar{\varrho}_1,\ldots,\varrho_r,\bar{\varrho}_r\}$ *holomorphe Funktion, wo*

$$D=\{s\in\mathbb{C}:\sigma_0\leqq\sigma\leqq\sigma_1,|t|\leqq h\}\cup\{s\in\mathbb{C}:\sigma\geqq\sigma_1\}:$$

$$\varrho_\nu=\beta_\nu+i\gamma_\nu,\sigma_0<\beta_\nu<\sigma_1,0<\gamma_\nu<h(\nu=1,\ldots,r);$$

$$\varrho_\nu\neq\varrho_{\nu'}(\nu\neq\nu')$$

ist. F habe im Punkt ϱ_ν einen Pol der Ordnung $m_\nu \geqq 1$ mit dem Hauptteil

$$\sum_{l=-m_\nu}^{-1} a_{\nu,l}(s-\varrho_\nu)^l \qquad (\nu=1,\ldots,r).$$

Es sei

$$|F(s)| \leqq M < +\infty \qquad (s \in \partial D).$$

Es gebe endlich wenigstens einen Pol $\varrho_{\nu_0}=\varrho(=\beta+i\gamma)$ $(\nu_0 \in \{1,\ldots,r\})$ derart, daß die Bedingung

$$h^2 > \frac{\sigma_1-\sigma_0}{\beta-\sigma_0}\gamma^2+(\sigma_1-\beta)(\sigma_1-\sigma_0) \tag{1.6}$$

erfüllt ist. Dann gibt es eine von $\sigma_0, \sigma_1, h, \beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ effektiv abhängige Konstante $c>0$ und eine von $\sigma_0, \sigma_1, h, \beta_1, \ldots, \gamma_r, M, a_{1,-1}, \ldots, a_{1,-m_1}, \ldots, a_{r,-1}, \ldots, a_{r,-m_r}$ effektiv abhängige Konstante $X_0 \geqq 2$ derart, daß

$$V(f,X) \geqq c \log X$$

für $X \geqq X_0$ ist.

Man kann den Satz verallgemeinern, indem man die Existenz reeller Pole der Funktion $F=\mathfrak{M}(f)$ zuläßt. Hier verzichten wir aber darauf, einen geeigneten Satz zu formulieren.

Es ist auch bemerkenswert, daß *die gegenseitige Stellung von nur einem Pol der Funktion $F=\mathfrak{M}(f)$ und dem Rechteck $P=\{s\in\mathbb{C}:\sigma_0<\sigma<\sigma_1, 0<t<h\}$ ein Ergebnis vom Typus* (1.4) *mit $c>0$ determiniert, ohne „das Rechteck P zu überschreiten“.*

Notieren wir die folgende unmittelbare Folgerung aus dem Satz.

Folgerung. *Es sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine stückweise stetige, in keinem Intervall $(a,b) \subset (0,\infty)$ konstante Funktion. Ferner sei $F=\mathfrak{M}(f)$ ihre Mellinsche Transformation, die für $\sigma>\sigma_1^*$ durch das absolut konvergente Integral*

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{-s-1}dx$$

definiert ist. F sei in der Halbebene $\sigma>\sigma_0^*$ meromorph, wo $-\infty \leqq \sigma_0^* < \sigma_1^*$ ist. Es gelte

$$\sup\{\beta^*\in\mathbb{R}:\beta^*>\sigma_0^*, \beta^* \text{ ist ein Pol von } F\} < \sup\{\beta\in\mathbb{R}:\beta>\sigma_0^*, \beta+i\gamma \text{ ist ein Pol von } F \text{ für gewisses } \gamma\neq 0\}.$$

Dann ist

$$\liminf_{X\to\infty}\frac{V(f,X)}{\log X}>0.$$

Der Satz verallgemeinert in der bestimmten Richtung ein Resultat von Kaczorowski and Pintz [3, Theorem 2]; die Folgerung ist in der Tat nicht neu, vgl. [3, Theorem 1].

Die beim Beweisen des Satzes genauer dargestellte Methode kann einen methodologischen Ausgangspunkt für mögliche Anwendungen bilden. Einige solche werden schon in Artikel II [7] gezeigt werden, wo ein wichtiger Fall betrachtet werden wird: $f(x)=\Delta(x)=\psi(x)-x (x>0)$, wobei ψ die Tschebyschevsche Funktion bezeichnet. Ohne hier in Einzelheiten einzugehen, können wir sagen, daß in [7] u.a. das geleistet werden wird, was schon der Satz in diesem Spezialfall $f = \Delta$ antizipiert.

Erwähnen wir noch, daß bei der Aufgabe, ein effektives Resultat vom Typus (1.4) für $V(\Delta_1, X) = V_1(X)$ zu geben, die Methode versagt; vgl. jedoch das ineffektive Ergebnis (1.1) [2].

2. Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$s=\sigma+it$	komplexe Zahl, für die analytische Zahlentheorie kanonisch geschrieben ($\sigma, t \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$)
$\mathbb{H}$	$=\{s \in \mathbb{C} : t \geqq 0\}$
∂D	topologischer Rand eines Gebietes $D \subset \mathbb{C}$ oder entsprechende orientierte Kurve
$\mathfrak{M}(f)$	Mellinsche Transformation einer Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, die im Punkt $s \in \mathbb{C}$ durch $$\int_0^\infty f(x)x^{-s-1}dx$$ definiert wird (falls das Integral absolut konvergiert); s. z.B. [1, S. 87ff.] (im Artikel bedeutet $\mathfrak{M}(f)$ eine entsprechende analytische Fortsetzung)
$O(\cdot)$	Landausches Symbol
$\ll$	Winogradovsches Symbol
$\asymp$	$\ll$ und $\gg$ gleichzeitig
$[x]$	größte ganze rationale Zahl, die $\leqq x$ ist ($x \in \mathbb{R}$)
$V(f, X)$	s. §1, unmittelbar nach (1.3)
□	Ende eines Beweises.

3. Lemma

Eine elementare Observation, die eine Grundlage der Kaczorowskischen Methode der Untersuchung der Anzahl der Vorzeichenwechsel arithmetischer Funktionen bildet, lautet:

Lemma [2, I, Lemma 1]. *Es sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine stückweise stetige, in keinem Intervall $(a,b)\subset(0,\infty)$ konstante Funktion, für die das Integral $\int_0^a |f(\xi)|d\xi$ für alle $a>0$ endlich ist. Ferner sei $f_1:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ durch*

$$f_1(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi \qquad (x>0)$$

definiert. Dann gilt für alle $X>0$

$$V(f,X)\geqq V(f_1,X).$$

4. Beweis des Satzes

Fall $r=1$, $m_1=1$. Es genüge f den Voraussetzungen des Satzes. Für $\eta\in\mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $A=\mathbf{A}(f)$:

$$A(x)=x^{-\eta}\int_0^x f(\xi)\xi^{\eta-1}d\xi \qquad (x>0).$$

Mit Hilfe des bekannten Fubinischen Satzes stellt man leicht fest, daß

$$\mathfrak{M}(A)(s)=\int_0^\infty A(x)x^{-s-1}dx=\frac{\mathfrak{M}(f)(s)}{s+\eta}=\frac{F(s)}{s+\eta}\,(\sigma>\sigma_1-\varepsilon,\eta\geqq-\sigma_1+\varepsilon)$$

ist. Führen wir die Bezeichnungen $A_1=A$, $A_n=\mathbf{A}(A_{n-1})$ $(n\geqq 2)$ ein. Induktiv zeigt man, daß

$$\mathfrak{M}(A_n)(s)=\frac{F(s)}{(s+\eta)^n}\,(n\in\mathbb{N},\sigma>\sigma_1-\varepsilon,\eta\geqq-\sigma_1+\varepsilon)$$

ist. Bemerken wir nun, daß die Funktionen $A_n(n\geqq 1)$ den Voraussetzungen der Mellinschen Umkehrformel genügen, s. z.B. [1, S. 88f.].

Wir schreiben $n+2(n\in\mathbb{N})$ statt n und setzen $\eta=d+k$ mit $d,k\in\mathbb{R}$. Dabei sind n, d, k Parameter, die später passend gewählt werden.

Wir nehmen

$$d+k>-\sigma_0 \tag{4.1}$$

an. Dann gilt

$$A_{n+2}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{F(s)x^s ds}{(s+d+k)^{n+2}}, \tag{4.2}$$

und aus dem Residuensatz folgt

$$A_{n+2}(x)=2\operatorname{Re}\frac{a_{-1}x^\varrho}{(\varrho+d+k)^{n+2}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{F(s)x^s ds}{(s+d+k)^{n+2}}, \tag{4.3}$$

wo $\varrho=\varrho_1$ ist.

Schreiben wir

$$a_{-1}=|a_{-1}|\exp(i\alpha_1), \varrho+d+k=|\varrho+d+k|\exp(i\alpha_2),$$

wo α_1, $\alpha_2\in\mathbb{R}$. Dann ist

$$2\operatorname{Re}\frac{a_{-1}x^\varrho}{(\varrho+d+k)^{n+2}}=2\frac{|a_{-1}|x^\beta}{|\varrho+d+k|^{n+2}}\cos(\gamma\log x+\alpha_1-\alpha_2(n+2)). \tag{4.4}$$

Grob gesagt, werden wenigstens manche Vorzeichenwechsel von f von diesem Term stammen, vgl. das Lemma. Dazu wollte man „das Restglied“ in (4.3) klein genug machen. Weiter wird diese Idee präzisiert und vervollständigt werden.

In den unten angegebenen Abschätzungen werden die in den Symbolen $O(\cdot)$ und $\ll$ implizierten Konstanten effektiv von den entsprechenden Parametern abhängen.

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \sigma_0, 0 \leqq t \leqq h\}. \\ L_2 &= \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \sigma_1, t \geqq h\}, \\ L_3 &= \{s \in \mathbb{C} : \sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1, t = h\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

und schätzen (unter geeigneten Voraussetzungen) die entsprechenden Teile vom Integral in der rechten Seite von (4.3) ab:

$$\left|\int_{L_1}\right| \leqq \frac{Mhx^{\sigma_0}}{|\sigma_0+d+k|^{n+2}} \ll \frac{x^{\sigma_0}}{(\sigma_0+d+k)^n},$$

$$\left|\int_{L_2}\right| \leqq \frac{Mx^{\sigma_1}}{|\sigma_1+ih+d+k|^n} \int_h^\infty \frac{dt}{t^2} \ll \frac{x^{\sigma_1}}{|\sigma_1+ih+d+k|^n},$$

$$\left|\int_{L_3}\right| \leqq \frac{M}{|\sigma_0+ih+d+k|^2} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{x^\sigma d\sigma}{|\sigma+ih+d+k|^n} \ll \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{x^\sigma d\sigma}{|\sigma+ih+d+k|^n}.$$

Die anderen, „symmetrisch gelegenen" Teile des Integrals schätzen wir in derselben Weise ab. Hieraus erhalten wir

$$\left(\frac{x^\beta}{|\varrho+d+k|^n}\right)^{-1} \left|\int_{\partial D} \frac{F(s)x^s ds}{(s+d+k)^{n+2}}\right| \ll x^{\sigma_0-\beta} \left|\frac{\varrho+d+k}{\sigma_0+d+k}\right|^n$$
$$+x^{\sigma_1-\beta}\left|\frac{\varrho+d+k}{\sigma_1+ih+d+k}\right|^n + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} x^{\sigma-\beta}\left|\frac{\varrho+d+k}{\sigma+ih+d+k}\right|^n d\sigma.$$

Ferner bemerken wir, daß

$$\log|1+s| = \sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma^2-t^2) + O(|s|^3)$$

für $|s| \leqq 1/2$ gilt. Liegt also s in einer beschränkten Menge, und ist k genügend groß (auch im Vergleich mit d), so erhält man

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varrho+d+k}{s+d+k}\right| &= \exp\left(\log\left|1+\frac{\varrho+d}{k}\right| - \log\left|1+\frac{s+d}{k}\right|\right) \\ &= \exp\left\{\frac{\beta-\sigma}{k} + \frac{1}{2k^2}(\gamma^2-t^2+(\sigma-\beta)(\sigma+\beta+2d)) + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Es werden zwei weitere Parameter λ und a eingeführt:

$$0 < \lambda < 1 \quad \text{und} \quad a > 0.$$

Wir setzen im folgenden voraus

$$X \geqq 2 \quad \text{und} \quad X^\lambda \leqq x \leqq X,$$

und n sei von nun an gegeben durch

$$n := [a \log X] + 1.$$

Setze abkürzend

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \lambda(\sigma_0-\beta) + a\left\{\frac{\beta-\sigma_0}{k} + \frac{1}{2k^2}(\gamma^2+(\sigma_0-\beta)(\sigma_0+\beta+2d)) + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right\}, \\ \mu_2 &:= (\sigma_1-\beta) + a\left\{\frac{\beta-\sigma_1}{k} + \frac{1}{2k^2}(\gamma^2-h^2+(\sigma_1-\beta)(\sigma_1+\beta+2d)) + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit (4.6) folgt

$$x^{\sigma_0-\beta}\left|\frac{\varrho+d+k}{\sigma_0+d+k}\right|^n \ll X^{\mu_1},$$

$$x^{\sigma_1-\beta}\left|\frac{\varrho+d+k}{\sigma_1+ih+d+k}\right|^n \ll X^{\mu_2}.$$

Setze schließlich noch voraus

$$\lambda > a/k$$

und

$$d \geqq -(\sigma_0+\sigma_1)/2. \tag{4.8}$$

Hieraus folgt

$$\max_{\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1} (\sigma-\beta)(\sigma+\beta+2d) = (\sigma_1-\beta)(\sigma_1+\beta+2d).$$

Unter Verwendung von (4.6) folgt dann

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} x^{\sigma-\beta}\left|\frac{\varrho+d+k}{\sigma+ih+d+k}\right|^n d\sigma \ll X^{\mu_2},$$

und insgesamt daher

$$\left(\frac{x^\beta}{|\varrho+d+k|^n}\right)^{-1}\left|\int_{\partial D}\frac{F(s)x^s ds}{(s+d+k)^{n+2}}\right| \ll X^{\mu_1}+X^{\mu_2}. \tag{4.9}$$

Nun hat man $\mu_1<0$ und $\mu_2<0$ herbeizuführen. Den Term $O(1/k^3)$ lasse man zunächst unberücksichtigt.

Setze abkürzend

$$\mathsf{Y} := 1+\frac{1}{2k(\beta-\sigma_0)}(\gamma^2+(\sigma_0-\beta)(\sigma_0+\beta+2d)),$$

$$\mathsf{Z} := \frac{\dfrac{\sigma_1-\beta}{k}}{\dfrac{\sigma_1-\beta}{k}+\dfrac{1}{2k^2}(h^2-\gamma^2-(\sigma_1-\beta)(\sigma_1+\beta+2d))}.$$

Man postuliere

$$\lambda > (a/k)\mathsf{Y}, \tag{4.10}$$

$$a/k > \mathsf{Z}. \tag{4.11}$$

Aber auch

$$a/k < \lambda < 1 \tag{4.12}$$

muß erfüllt sein. Damit der Nenner von Z keine Sorgen bereitet, wünscht man sich auch noch

$$h^2-\gamma^2-(\sigma_1-\beta)(\sigma_1+\beta+2d) > 0. \tag{4.13}$$

Angenommen es gilt

$$\gamma^2+(\sigma_0-\beta)(\sigma_0+\beta+2d)>0. \tag{4.14}$$

Dann ist

$$\mathrm{Y}>1. \tag{4.15}$$

Aber (4.14) ist gleichbedeutend mit

$$d<-\frac{1}{2}(\sigma_0+\beta)+\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\beta-\sigma_0}.$$

Wir erinnern uns an (4.8). Dann sei also

$$-\frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}\leqq d<-\frac{1}{2}(\sigma_0+\beta)+\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\beta-\sigma_0}, \tag{4.16}$$

und dies ist möglich. Von nun an erfülle also d diese Bedingung. Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, könnte man durchaus $d:=-(\sigma_0+\sigma_1)/2$ wählen.

Als nächstes wird

$$\mathrm{R}:=h^2-\frac{\sigma_1-\sigma_0}{\beta-\sigma_0}\gamma^2+(\sigma_1-\beta)(\sigma_1-\sigma_0)$$

gesetzt. Nach Voraussetzung (1.6) ist

$$\mathrm{R}>0. \tag{4.17}$$

Man rechnet nach, daß (4.13) equivalent mit

$$d<-\frac{1}{2}(\sigma_0+\beta)+\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\beta-\sigma_0}+\frac{\mathrm{R}}{\sigma_1-\beta}$$

ist. Aber das stimmt wegen (4.16) und (4.17).

Man rechnet nach

$$\mathrm{YZ}<1 \Leftrightarrow (4.17).$$

Nun kann man

$$\mathrm{Z}<a/k<1/\mathrm{Y}$$

wählen. Dann haben wir bereits (4.11), und es ist $(a/k)\mathrm{Y}<1$. Also kann man wählen

$$(a/k)\mathrm{Y}<\lambda<1.$$

Hieraus und aus (4.15) folgen (4.10) und (4.12).

Nun fehlt aber noch $O(1/k^3)$. Dazu braucht man nur $k\geqq k_0$ zu wählen.

Einerseits erhalten wir jetzt aus (4.3), (4.4) und (4.9)

$$V(A_{n+2},X)\geqq(1-\lambda')(\gamma/\pi)\log X \tag{4.18}$$

für gewisses $\lambda'\in(0,1)$, $\lambda'>\lambda$ und $X\geqq X_0\geqq 2$. Andererseits ergibt die Anwendung des Lemmas

$$V(f,X)\geqq V(A_1,X)\geqq\ldots\geqq V(A_{n+2},X) \quad (X>0),$$

was zusammen mit (4.18) zu

$$V(f,X) \geqq c \log X \qquad (X \geqq X_0)$$

führt, wo $c = (1-\lambda')\gamma/\pi$ ist.

Schließlich kann man die postulierte effektive Abhängigkeit der Konstanten c und X_0 durch die Nachprüfung der obigen Überlegungen a posteriori feststellen. □

Fall $r=1$, $m_1 \geqq 2$ *(Skizze des Beweises).* Mit Ausnahme der anderen Gestalt von $\operatorname*{Res}_{s=\varrho} \Phi(s)$, wobei

$$\Phi(s) = \frac{F(s)x^s}{(s+d+k)^{n+2}} \tag{4.19}$$

bezeichnet, führt man den Beweis analog dem Fall $r=1$, $m_1=1$ durch. Man hat nämlich (statt m_1 wird einfach m geschrieben)

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=\varrho} \Phi(s) = {} & \frac{x^\varrho}{(\varrho+d+k)^{n+2}} \sum_{l=-m}^{-1} \frac{a_l}{(-l-1)!} \sum_{j=0}^{-l-1} \binom{-l-1}{j} \\ & \times (\log x)^{-l-1-j} \frac{(-n-2)(-n-3)\dots(-n-2-j+1)}{(\varrho+d+k)^j}.\end{aligned}$$

Wählen wir a, d, k, λ und n wie im Fall $m=1$. Für $X^\lambda \leqq x \leqq X$ ist dann

$$\operatorname*{Res}_{s=\varrho} \Phi(s) = \frac{a_{-m}}{(m-1)!} \frac{x^\varrho}{(\varrho+d+k)^{n+2}} \left\{ \left(\log x - \frac{n}{\varrho+d+k} \right)^{m-1} + O((\log X)^{m-2}) \right\}.$$

Wegen $\lambda \log X \leqq \log x \leqq \log X$ und $\gamma > 0$ gilt

$$\left| \log x - \frac{n}{\varrho+d+k} \right| \asymp \log X, \tag{4.20}$$

und daher

$$\operatorname*{Res}_{s=\varrho} \Phi(s) = \frac{a_{-m}}{(m-1)!} \frac{x^\varrho}{(\varrho+d+k)^{n+2}} \left(\log x - \frac{n}{\varrho+d+k} \right)^{m-1} (1 + O((\log X)^{-1})). \tag{4.21}$$

Hieraus ersieht man nun, daß die im Fall $m=1$ durchgeführten Überlegungen mutatis mutandis wiederholt werden können. Das Glied

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \frac{a_{-m}}{(m-1)!} \frac{x^\varrho}{(\varrho+d+k)^{n+2}} \left(\log x - \frac{n}{\varrho+d+k} \right)^{m-1} \\ & = \frac{2|a_{-m}|}{(m-1)!} \frac{x^\beta}{|\varrho+d+k|^{n+2}} \left| \log x - \frac{n}{\varrho+d+k} \right|^{m-1} \cos(\gamma \log x \\ & \quad + \alpha_1 - (n+2)\alpha_2 + (m-1)\alpha(x)), \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei

$$\alpha(x) = \operatorname{Arg}\left(\log x - \frac{n}{\varrho+d+k} \right) \qquad (X^\lambda \leqq x \leqq X)$$

und $\alpha_1 = \operatorname{Arg}(a_{-m})$, $\alpha_2 = \operatorname{Arg}(\varrho + d + k)$ gesetzt wird, stellt insbesondere die gewünschte Oszillation her. Der in (4.21) szs. zusätzlich vorkommende Faktor $(\log x - n/(\varrho + d + k))^{m-1}$ ermöglicht uns um so mehr, eine Ungleichung vom Typus (4.9) (mit $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$) herzuleiten. Bemerken wir noch, daß die Funktion $\alpha : [X^\lambda, X] \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist. Um die gewünschte Anzahl geeigneter Oszillationen von (4.22) zu bekommen, können wir daher die Zwischenwerteigenschaft stetiger Funktionen verwenden. □

Fall $r \geqq 2$ (Skizze des Beweises). Wie im Fall $r = 1$ werden die Funktionen $A_n (n \geqq 2)$ eingeführt. Mit der Bezeichnung (4.19) erhält man

$$A_{n+2}(x) = 2 \sum_{\nu=1}^{r} \operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{s=\varrho_\nu} \Phi(s)\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \Phi(s)\, ds, \tag{4.23}$$

wobei (4.1) angenommen ist (d, $k \in \mathbb{R}$ sind Parameter).

Unter der Voraussetzung

$$X \geqq 2, X^\lambda \leqq x \leqq X \quad \text{und} \quad n = [a \log X] + 1,$$

wo $\lambda \in (0,1)$ und $a > 0$ Parameter sind, die passend zu wählen sind, bekommt man aus (4.20) und (4.21)

$$\left|\operatorname*{Res}_{s=\varrho_\nu} \Phi(s)\right| \asymp \frac{x^{\beta_\nu}}{|\varrho_\nu + d + k|^n} (\log X)^{m_\nu - 1} \qquad (\nu = 1, \ldots, r). \tag{4.24}$$

Nun sind die Pole ϱ_ν geeignet zu ordnen. Zu diesem Zweck wird zuerst ein Pol $\varrho = \varrho_{\nu_0}$ fixiert, für den die Bedingung (1.6) erfüllt ist. Ferner wird d so gewählt, daß

$$\frac{\gamma^2}{\beta - \sigma_0} - \sigma_0 - \beta < 2d < \frac{h^2 - \gamma^2}{\sigma_1 - \beta} - \sigma_1 - \beta \tag{4.25}$$

ist. Dies ist möglich wegen (1.6). Für s, $s' \in \mathbb{H}$ wird

$$D(s', s) = t^2 - t'^2 - (\sigma - \sigma')(\sigma + \sigma' + 2d)$$

gesetzt, und in $\mathbb{H}$ die Relation $\mathscr{P}$ eingeführt:

$$s' \mathscr{P} s \Leftrightarrow D(s', s) > 0, \quad \text{oder} \quad D(s', s) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma' \geqq \sigma \qquad (s, s' \in \mathbb{H}).$$

$\mathscr{P}$ ist eine Ordnung in $\mathbb{H}$ (d.h., sie ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und hat die Eigenschaft: für beliebige $s, s' \in \mathbb{H}$ ist $s \mathscr{P} s'$ oder $s' \mathscr{P} s$). Insbesondere gibt es in der Menge $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_r\} \subset \mathbb{H}$ ein Element $\varrho' = \varrho_{\nu'} (= \beta' + i\gamma')$ derart, daß

$$\varrho' \mathscr{P} \varrho_\nu \tag{4.26}$$

für $\nu = 1, \ldots, r$ ist. Schreibt man $\varrho_0 = \sigma_0$, $\varrho_{r+1} = \sigma_1 + ih$, so hat man aus (4.25): $\varrho \mathscr{P} \varrho_0$ und $\varrho \mathscr{P} \varrho_{r+1}$. Daher gilt (4.26) auch für $\nu = 0, r+1$.

Die Vorzeichenwechsel von A_{n+2} werden von dem gewonnenen Pol ϱ' stammen.

Es gilt (4.8). Unter Voraussetzung (4.12) erhält man aus (4.24)

$$\left(\left|\operatorname*{Res}_{s=\varrho'} \Phi(s)\right|\right)^{-1} \left|\int_{\partial D} \Phi(s)\, ds\right| \ll X^{\mu'_0} + X^{\mu'_{r+1}},$$

we μ_0', μ_{r+1}' zu μ_1, μ_2 [s. (4.7)] *analoge* Ausdrücke sind. Auch ist

$$\left(\left|\operatorname*{Res}_{s=\varrho'} \Phi(s)\right|\right)^{-1} \left|\operatorname*{Res}_{s=\varrho_\nu} \Phi(s)\right| \ll X^{\mu_\nu'}(\log X)^{m_\nu - m_{\nu'}} \qquad (\nu=1,\dots,r;\ \nu \neq \nu'),$$

wobei $\mu_\nu'(\nu \neq \nu')$ analog zu setzen sind.

Mit geeigneter Wahl der Parameter a, λ und k führt man nun $\mu_\nu' < 0$ $(\nu=0,\dots,r+1;\ \nu \neq \nu')$ herbei. Dabei kann man sich auf (4.26) stützen und im allgemeinen wie im Beweis des Satzes im Fall $r=1$ vorgehen. Der technische Unterschied besteht darin, daß aktuell der Parameter d anders als im Fall $r=1$ oben gewählt wird [vgl. (4.16) und (4.25)], und das ist zu berücksichtigen.

Man schreibt daher (4.23) in Gestalt

$$A_{n+2}(x) = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{s=\varrho'} \Phi(s)\right)(1 + O(X^{\mu'})),$$

wo $\mu' < 0$ ist. In derselben Weise wie im Fall $r=1$ betrachtet man $\operatorname*{Res}_{s=\varrho'} \Phi(s)$. Unter Verwendung des Lemmas folgt die Behauptung des Satzes. □

Danksagungen. Artikel I und II dieser Reihe bilden eine verbesserte Version eines Teils meiner Doktorarbeit. Herrn Professor Włodzimierz Staś danke ich herzlich für wissenschaftliche Leitung. Mein Dank gilt auch Jerzy Kaczorowski für eine Reihe von wertvollen Bemerkungen. Dem anonymen Referenten, der zahlreiche Verbesserungen vorgeschlagen hat, bin ich besonders verpflichtet.

Literatur

1. Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik. Bd. I. 2. Aufl. Berlin: Springer 1937
2. Kaczorowski, J.: On sign-changes in the remainder-term of the prime-number formula. I. II. Acta Arith. **44**, 365–377 (1984); ibid. **45**, 65–74 (1985)
3. Kaczorowski, J., Pintz, J.: Oscillatory properties of arithmetical functions. I. Acta Math. Hung. **48** (1–2), 173–185 (1986)
4. Lehman, R.: On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. Acta Arith. **11**, 397–410 (1966)
5. Littlewood, J.E.: Sur la distribution des nombres premiers. C. R. Acad. Sci. Paris **158**, 1869–1872 (1914)
6. Riemann, B.: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. 2. Aufl. Leipzig: Teubner 1892
7. Szydło, B.: Über Vorzeichenwechsel einiger arithmetischer Funktionen. II. Math. Ann. **283**, 151–163 (1989)

Eingegangen am 26. Oktober 1987; revidierte Fassung am 31. Mai 1988