Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n°2, 1986–1987

Irrégularités dans la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques

GUY ROBIN[1]

RÉSUMÉ. — Nous étudions dans cet article le comportement asymptotique, lorsque x tend vers l'infini, de l'expression

$$\sum_{n\leq x}\Big(\varphi(k)\pi(n;k,l)-\pi(n)\Big)n^{-\alpha}\log^{\beta} n$$

expression dans laquelle $\pi(n;k,l)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à n et congrus à 1 modulo k, $\pi(n)=\pi(n;1,1)$, φ est la fonction d'Euler et α et β sont deux réels.

Ceci nous permet en particulier de démontrer que la conjecture de SHANKS (1952)

$$\sum_{n\leq x}\frac{n^{1/2}}{\pi(n)}\Big(\pi(n;4,3)-\pi(n;4,1)\Big)\sim x$$

est fausse ainsi que sa généralisation aux modules supérieurs et que la conjecture de BRENT (1975)

$$\sum_{n\leq x}\frac{n^{-1/2}}{\pi(n)}\Big(\pi(n;4,3)-\pi;4,1)\Big)\sim\log x$$

est équivalente à l'hypothèse de Riemann généralisée.

ABSTRACT. — We study here the asymptotic behaviour of

$$\sum_{n\leq x}\Big(\varphi(k)\pi(n;k,l)-\pi(n)\Big)n^{-\alpha}\log^{\beta} n$$

where

$$\pi(n;k,l)=\#\Big\{x\leq n,\ x\equiv l \pmod k,\ x \text{ prime}\Big\}$$

$$\pi(n)=\#\Big\{x\leq n,\ x \text{ prime}\Big\}$$

φ is the Euler function and $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$

[1] Laboratoire de théorie des Nombres et Algorithmique, Faculté des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87060 Limoges et GRECO de Calcul formel

We prove that SHANKS' conjecture (1952)

$$\sum_{n\le x}\frac{n^{1/2}}{\pi(n)}\Big(\pi(n;4,3)-\pi(n;4,1)\Big)\sim x$$

is false and also its generalization for modulus $k>2$. We show that BRENT's conjecture (1975)

$$\sum_{n\le x}\frac{n^{-1/2}}{\pi(n)}\Big(\pi(n;4,3)-\pi(n;4,1)\Big)\sim \log x$$

is equivalent to the extended Riemann hypothesis.

I. Introduction

Désignons par $\pi(x;k,l)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x et congrus à k modulo l avec $(k,l)=1$.

Les calculs numériques montrent que l'expression

$$\Delta(x):=\pi(x;4,3)-\pi(x;4,1)$$

a tendance à être positive. Cependant, LEECH, en 1957, (cf. [LEE]) a montré que $\Delta(26861)=-1$ et HARDY - LITTLEWOOD, en 1971, (cf. [HARD 1]) ont prouvé que

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\right\}\Delta(x)=\pm\infty$$

plus précisément : $\Delta(x)=\Omega_\pm(x^{1/2}\log\log x/\log x)$.

Afin de mieux étudier $\Delta(x)$ et ses généralisations, certains auteurs ont considéré des sommes du type :

$$\sum_{p\le x}\Big(\pi(p;k,l)-\pi(p;k,l')\Big)f(p,x)$$

$f(p,x)$ étant une fonction poids, l et l' étant premiers avec k.

Ainsi la conjecture de CHEBYCHEV de 1853

$$\sum_{p\le x}\Delta(p)e^{-p/x}\xrightarrow[x\to\infty]{}-\infty$$

est équivalente à l'hypothèse de Riemann généralisée, d'après HARDY et LITTLEWOOD ([HAR 1]) et LANDAU ([LAN]).

Dans une série d'articles, entre 1960 et 1970, Knapowski et Turan ([Kna]), puis Bentz et Pintz ([Ben], [Pin]), ont considéré d'autres fonctions poids :

$$f(p,x)=\exp(-\log^2 p/x), f(p,x)=\exp\big(-\log^2(p/x)\big).$$

Dans une autre direction Shanks en 1959 ([Sha]) et Brent en 1975 ([Bre]) ont conjoncturé que :

$$(S) \qquad \sum_{n\leq x}\Delta(n)n^{1/2}/\pi(n)\sim x$$

et, ce qui est plus faible,

$$(B) \qquad \sum_{n\leq x}\Delta(n)/\big(\pi(n)n^{1/2}\big)\sim \log x$$

La première conjecture a été infirmée ([Ell], [Che]).

Dans ce papier, nous étudions plus généralement la somme :

$$P(x;k,l;\alpha,\beta)=\sum_{n\leq x}\Delta(n;k,l)\log^\beta n/n^\alpha$$

pour $k\in\mathbf{N}$, $l\in\mathbf{N}$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ avec $\Delta(x;k,l)=\phi(k)\pi(x;k,l)-\pi(x)$ et ϕ étant la fonction d'Euler.

On démontre, en particulier, l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann généralisée et la conjecture de Brent (B) et l'on montre que la conjecture de Shanks (S), généralisée aux nombres premiers dans les progressions arithmétiques reste fausse.

Une étude du même genre permettrait d'obtenir des résultats sur les sommes obtenues en remplaçant $\Delta(x;k,l)$ par

$$\pi(x;k,l)-\pi(x,k,l').$$

II. Notations

Nous précisons ici les notations utilisées dans l'article.

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 \tag{1}$$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \le x} 1/m \tag{2}$$

$$\phi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p \tag{3}$$

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv l (mod\ k)}} 1 \tag{4}$$

$$\Pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p^m \le x \\ p^m \equiv l (mod\ k)}} \frac{1}{m} \tag{5}$$

$$\Psi(x; k, l) = \sum_{\substack{p^m \le x \\ p^m \equiv l (mod\ k)}} \log p \tag{6}$$

ϕ fonction d'Euler

$$\Delta(x) = \Delta(x; k, l) = \phi(k)\pi(x; k, l) - \pi(x) \tag{7}$$

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x; k, l; \alpha, \beta) = \sum_{n \le x} \Delta(n) \log^\beta n . n^{-\alpha} \tag{8}$$

$$r(x) = r(x; k, l) = \phi(k)\Pi(x; k, l) - \Pi(x) \tag{9}$$

$$q(x) = q(x; k, l) = \phi(k)\psi(x; k, l) - \psi(x) \tag{10}$$

Soit χ un caractère modulo k, on pose

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^s \text{ la série de Dirichlet associée} \tag{11}$$

$$\theta(\chi) = \sup\{Re(\rho); \rho \text{ zéro de } L(s, \chi)\} \tag{12}$$

$$\theta_k = \max\{\theta(\chi), \chi \text{ décrivant l'ensemble des caractères modulo } k\} \tag{13}$$

$$\Lambda(n) = \text{ fonction de Von Mangold} \tag{14}$$

$$\psi(x; \chi) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)\chi(n) \tag{15}$$

On définit encore

$$\epsilon = \epsilon(k, l) = \text{ nombre de solutions de la congruence } x^2 \equiv l(\text{ mod } k) \text{ avec } 0 \le x \le k - 1. \tag{16}$$

III. Enoncé des résultats

L'objet de cet article est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME .— *Soit $k > 1$ et l tel que $(l,k) = 1$. On suppose que les fonctions $L(s,\chi)$ attachées aux caractères χ modulo k n'ont pas de zéros sur* $]0,1[$.

Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= \mathcal{P}(x;k,l;\alpha,\beta)\\ &= \sum_{n\le x}\big(\phi(k)\pi(n;k,l) - \pi(n)\big)\frac{\log^\beta n}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

(A). — *Si* $\theta_k > 1/2$.

(a) $\mathcal{P}(x) = 0\big(1 + x^{1-\alpha+\theta_k}\log^{\beta-1}x\big)$

(b) Si $\alpha < 1+\theta_k$, $\mathcal{P}(x) = \Omega_\pm(x^{1-\alpha+\xi})$ *pour* $1/2 < \xi < \theta_k$ *et s'il existe un zéro d'une fonction* $L(s,\chi)$ *de partie réelle* θ_k

$$\mathcal{P}(x) = \Omega_\pm(x^{1-\alpha+\theta_k}\log^{\beta-1}x).$$

(B). — *Si* $\theta_k = 1/2$.

(c) Si $\alpha > 3/2$ *ou* $\alpha = 3/2$ *et* $\beta < 0$, $\mathcal{P}(x) = 0(1)$

(d) Si $\alpha = 3/2$

$\beta = 0 \Longrightarrow \mathcal{P}(x) = a\log\log x + 0(1)$

$\beta > 0 \Longrightarrow \mathcal{P}(x) = a\log^\beta x/\beta + 0(\log^{\beta-1}x\log\log x)$ *avec* $a = 1-\epsilon(k,l)$.

(e) Si $\alpha < 3/2$ $\mathcal{P}(x) = 0(x^{3/2-\alpha}\log^{\beta-1}x)$.

(C). — *Si* $\theta_k = 1/2$ *et* $\alpha < 3/2$.

(f) Pour certains k (Ex : 3,4,5,6,7,8,9,10,12), il existe $\alpha_{k,l}$ *tel que pour* $\alpha > \alpha_{x,l}$ *et pour tout x assez grand on ait :*

$\mathcal{P}(x) < 0$ *si l est résidu quadratique,*

$\mathcal{P}(x) > 0$ *si l est non résidu quadratique.*

(g) Pour d'autres k (Ex : 23,43,67,163), il existe $\beta_{k,l}$ *tel que pour*

$\alpha < \beta_{k,l}$ *on ait* $\mathcal{P}(x) = \Omega_\pm(x^{3/2-\alpha}\log^{\beta-1}x)$.

Remarques. — 1) La conjecture de Brent correspond à l'étude du cas $\alpha = 3/2$ et $\beta = 1$. Les parties (b) et (d) du théorème montrent que cette conjecture est équivalente à $\theta_k = 1/2$.

2) La partie (b) du théorème montre que la conjecture de Shanks généralisée aux nombres premiers dans une progression arithmétique de raison k reste fausse.

3) On peut montrer -mais nous ne le ferons pas ici-, en procédant comme dans les articles de Grosswald et Stark, (cf [Gro], [Sta]), que pour certains couples (k,l) on a

$$\Delta(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{1/2}/\log x).$$

4) La démonstration du théorème n'est faite que dans le cas $\beta = 1$. Le cas général s'obtient facilement avec la formule sommatoire d'Abel.

IV. Lemmes préparatoires

Lemme 1. — *Posons*

$$I(x;\alpha,\beta) = \int_2^x q(t)\log^\beta t\; t^{-\alpha}\, dt$$

$q(t)$ étant défini par la formule (10)

i) Si $\alpha \le 1+\theta_k$ alors $I(x;\alpha,\beta) = 0(x^{1-\alpha+\theta_k}\log^\beta x)$

ii) Si $\alpha > 1+\theta_k$ alors $I(x;\alpha,\beta) = 0(1)$.

Démonstration. — Si l'on pose $\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\,\chi(n)$, on peut écrire

$$q(x) = \sum_{\chi\neq\chi_0}\psi(x,\chi)\overline{\chi}(l) + \psi(x,\chi_0) - \psi(x)$$

soit

$$q(x) = \sum_{\chi\neq\chi_0}\psi(x,\chi)\overline{\chi}(l) + 0(\log x). \tag{17}$$

D'après la formule explicite relative à $\psi(x,\chi)$ (cf. [Dav]), que l'on peut écrire,

$$\psi(x,\chi) = -\sum_{\rho(\chi)}\frac{x^{\rho(\chi)}}{\rho(\chi)} + 0(\log x)$$

on obtient

$$q(x) = -\sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\rho(\chi)} \frac{x^{\rho(\chi)}}{\rho(\chi)} + 0(\log x)$$

Il vient donc

$$I(x;\alpha,\beta) = -\sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\rho(\chi)} \frac{1}{\rho(\chi)} \int_2^x t^{\rho(\chi)-\alpha} \log^\beta t \, dt + 0(x^{1-\alpha}\log^{\beta+1} x).$$

ou encore

$$Ix;\alpha,\beta) = -\sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\rho(\chi)} \frac{1}{\rho(\chi)(\rho(\chi)-\alpha+1)} x^{\rho(\chi)-\alpha+1}\log^\beta x + 0\big(x^{1-\alpha}\log^{\beta+1}(x)\big) \tag{18}$$

Le lemme est alors conséquence de ce que pour tout caractère χ on a

$$\sum_{\rho(\chi)} \left| \frac{1}{\rho(\chi)(\rho(\chi)-\alpha+1)} \right| < \infty.$$

LEMME 2.— *Posons*

$$J(x;\alpha) = \int_2^x \frac{\Delta(t)-r(t)}{2} \log t \, dt$$

Δ *et* r *étant définies par les formules (7) et (9).*

Alors avec ϵ *défini par (16) il vient*

i) Si $\alpha < 3/2$, $J(x;\alpha) = \frac{1-\epsilon}{3/2-\alpha} x^{3/2-\alpha} + 0\left(\frac{x^{3/2-\alpha}}{\log x}\right)$

ii) Si $\alpha = 3/2$, $J\big(x;\frac{3}{2}\big) = (1-\epsilon)\log x + 0(\log\log x)$

iii) Si $\alpha > 3/2$, $J(x;\alpha) = 0(1)$.

Démonstration.— On a :

$$\Pi(x;k,l) = \pi(x;k,l) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l_1 \\ l_1^2\equiv l (mod\ k)}} \pi(x^{1/2};k,l_1) + 0(x^{1/3}/\log x)$$

et comme pour tout m on a

$$1/2\pi(x^{1/2};k,m) - \frac{\theta(x^{1/2};k,m)}{\log x} = \frac{1}{2}\int_2^{x^{1/2}} \frac{\theta(t;k,m)}{t\log^2 t} dt$$
$$= \frac{2\sqrt{x}}{\phi(k)\log^2 x} + 0(\sqrt{x}/\log^3 x)$$

on peut écrire :

$$\Pi(x;k,l) - \pi(x;k,l) = \frac{\epsilon\big(1 + 0(1/\log x)\big)\sqrt{x}}{\phi(k)\log x} + 0(x^{1/3}/\log x)$$

De même

$$\Pi(x) - \pi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}(1 + 0(1/\log x))$$

il vient donc

$$\phi(x) - r(x) = \frac{(1-\epsilon)\sqrt{x}}{\log x}\left(1 + 0(\frac{1}{\log x})\right)$$

et ainsi

$$J(x;\alpha) = (1-\epsilon)\int_2^x \frac{dt}{t^{\alpha-1/2}} + 0\left(\int_2^x \frac{dt}{t^{\alpha-1/2}\log t}\right)$$

formule qui nous permet de conclure.

LEMME 3.— *Soit* $(a_n)_{n\in N}$ *une suite de réels positifs ou nuls,* $A(x) = \sum_{n\le x} a_n$ *et* f *une fonction positive monotone, alors pour* $m \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=1}^{m} A(n)f(n) = \int_1^m A(t)f(t)dt + R(m)$$

avec

$$0 \le R(m) \le \sum_{n=1}^{m} a_n f(n) \text{ si } f \text{ décroissante}$$

$$\sum_{n=1}^{m} a_n\ f(n) \le R(m) \le A(m)\ f(m) \text{ si } f \text{ croissante}$$

Démonstration.— Ecrivons

$$\begin{aligned}\int_1^m A(t)f(t)dt &= \sum_{n=1}^{m-1} A(n)\int_n^{n+1} f(t)dt \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} A(n)f(n) + \sum_{n=1}^{m-1} A(n)\int_n^{n+1}\big(f(t)-f(n)\big)dt\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{m} A(n)f(n) = \int_1^m A(t)f(t)dt + R(m)$$

avec

$$R(m) = A(m)f(m) + \sum_{n=1}^{m-1} A(n) \int_n^{n+1} \big(f(n) - f(t)\big)\,dt.$$

Si f est décroisante, $f(n) - f(t) \leq f(n) - f(n+1)$ pour $t \in [n, n+1]$ et

$$R(m) \leq A(m)f(m) + \sum_{n=1}^{m-1} A(n)\big(f(n) - f(n+1)\big) = \sum_{n=1}^{m} a_n f(n).$$

On procède de même si f est croissante.

Comme conséquence de ce lemme nous obtenons le

LEMME 4.— *On peut écrire*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\pi(n) \log n}{n^\alpha} = \int_1^x \frac{\pi(x) \log x}{x^\alpha} + R_1(x)$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\pi(n; k, l) \log n}{n^\alpha} = \int_1^x \frac{\pi(x; k, l) \log x}{n^\alpha} + R_2(x).$$

Les restes $R_1(x)$ et $R_2(x)$ étant

$$0(x^{1-\alpha}) \text{ si } \alpha < 1,\ 0(\log x) \text{ si } \alpha = 1 \text{ et } 0(1) \text{ si } \alpha > 1.$$

LEMME 5.— *Si χ est un caractère primitif modulo k on a :*

$$\sum_\rho Re\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} - \frac{\gamma}{2} + (b-1)\log 2 + Re\left(\frac{L'}{L}(1, \chi)\right). \tag{19}$$

formule dans laquelle la somme porte sur tous les zéros de $L(s, \chi)$ et où $b = 0$ ou 1 selon que $\chi(-1) = 1$ ou -1.

Démonstration.— Considérons les formules (17) et (18) de ([DAV], p.83).

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\, s + \frac{1}{2}\, b\right) + B(\chi) + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{20}$$

$$Re\big(B(\chi)\big) = -\sum_\rho Re\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{21}$$

Prenons la partie réelle de (20) en $s = 1$. Si ρ est zéro de $L(s,\chi)$, $1-\overline{\rho}$ est aussi un zéro, par suite

$$Re\left(\sum_\rho \frac{1}{1-\rho}\right) = Re\left(\sum_\rho \frac{1}{\overline{\rho}}\right) = Re\left(\sum_\rho \frac{1}{\rho}\right).$$

On obtient ainsi la formule en remarquant que

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ \log 2 \text{ et } \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) = -\gamma.$$

Notons que dans le cas où $\chi(-1) \neq 1$ on a $L(0,\chi) \neq 0$ et qu'ainsi on peut écrire aussi la formule suivante

$$Re\left(\sum_\rho \frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi} + \frac{1}{2}\gamma + \log 2 - Re\left(\frac{L'}{L}(0,\chi)\right).$$

V. Démonstration du théorème

a) Nous démontrons d'abord les parties (a), (c), (d), (e) du théorème.

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n\le x}\left(\phi(k)\pi(n;k,l) - \pi(n)\right)\frac{\log n}{n^\alpha}$$

peut être écrit d'après le lemme 4

$$\mathcal{P}(x) = \int_2^x \frac{\Delta(t)\log t}{t^\alpha} + R_3(x)$$

le reste $R_3(x)$ ayant les propriétés des reste $R_1(x)$ et $R_2(x)$ et d'après les notations du lemme 2,

$$\mathcal{P}(x) = J(x;\alpha) + \int_2^x \frac{r(t)\log t}{t^\alpha} + R_3(x)$$

Comme on peut écrire aussi

$$r(x) = \int_{2-}^x \frac{dq(t)}{\log t} = \frac{q(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{q(t)}{t\log^2 t}dt$$

on a d'après le lemme 1, en choisissant $\alpha = 1$ et $\beta = -2$,

$$r(x) = \frac{q(x)}{\log x} + O(x^{\theta_k}/\log^2 x)$$

Finalement $\mathcal{P}(x)$ peut être écrit

$$\mathcal{P}(x) = J(x;\alpha) + I(x;\alpha,0) + 0(1 + x^{\theta_k+1-\alpha}/\log x) \qquad (22)$$

Les propriétés établies aux lemmes 1 et 2 permettent alors de conclure.

b) Démontrons maintenant la partie (f).

D'après le lemme 1 et plus précisément d'après la formule (18), (f) est conséquence d'une inégalité du type.

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{\rho(\chi)}\left|\frac{1}{\rho(\chi)(\rho(\chi)-\alpha+1)}\right| \leq \frac{|1-\epsilon|}{3/2-\alpha} \qquad (23)$$

Posons

$$A := \sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{\rho(\chi)}\frac{1}{|\rho(\chi)|^2}$$

expression que l'on peut calculer (voir tableau ci-dessous) en utilisant le lemme 5 et le fait que

$$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2} = 2Re\left(\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}\right)$$

. Supposons que $k \in \{3,4,5,6,7,8,9,10,12\}$. Si l'on choisit α dans l'intervalle $[1,3/2[$ l'inégalité (23) est satisfaisante.

En effet dans ce cas $|\rho(\chi)-\alpha+1| > |\rho(\chi)-1/2|$, $3/2-\alpha \leq 1/2$ et le premier membre de (23) est majoré par

$$A \max_{\chi,\rho(\chi)}\left|\frac{\rho(\chi)}{\rho(\chi)-1/2}\right|$$

expression inférieure à $2|1-\epsilon|$ comme le montre le calcul.

Au contraire si $\alpha < 1$ l'inégalité (23) n'est pas toujours satisfaite. Elle le sera sûrement si $\alpha > \alpha_{k,l}$, $\alpha_{k,l}$ étant défini par la relation

$$A = \frac{|1-\epsilon|}{3/2-\alpha_{k,l}}$$

puisque dans ce cas $|\rho+1-\alpha| < |\rho|$.

Le tableau suivant montre alors les valeurs $\alpha_{k,l}$ obtenues (l *r.q.* signifie l résidu quadratique).

k	$\|1-\epsilon\|$	A	$\alpha_{k,1}$
1;2	1	0,047	-19,78
3;6	1	0,1139	-7,28
4	1	0,1563	-4,90
5;10	1	0,580	-0,22
7	1	0,673	0,01
8 l r.q.	3	0,360	-6,83
l ¬r.q.	1	0,360	-1,28
9	1	0,680	0,03
12 l r.q.	3	0,300	-8,50
l ¬r.q.	1	0,300	-1,83

c) Nous terminons la démonstration du théorème par l'étude des parties (b) et (g). Nous avons alors $\alpha < 1 + \theta_k$.

Sous les hypothèses de (b) nous avons $\theta_k > 1/2$ et par suite le terme prépondérant dans $\mathcal{P}(x)$ est $I(x;\alpha,0)$.

Compte tenu de (17), $I(x;\alpha,0)$ a le même comportement que

$$g(x) = \int_2^x \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{\psi(t,\chi)\overline{\chi}(l)}{t^\alpha} \right) dt.$$

Soit $G(s)$ la transformée de Mellin de $g(x)$.

Calculons d'abord

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+s}} \int_2^x \frac{\psi(t,\chi)}{t^\alpha} dt \\ &= \int_2^\infty \frac{\psi(t,\chi)}{t^\alpha} dt \int_t^\infty \frac{dx}{x^{1+s}} \\ &= \frac{1}{s} \int_2^\infty \frac{\psi(t,\chi)}{t^{s+\alpha}} dt \\ F(s) &= -\frac{1}{s(s+\alpha-1)} \frac{L'}{L}(s+\alpha-1,\chi). \end{aligned}$$

On a donc

$$G(s) = -\frac{1}{s(s+\alpha-1)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{L'}{L}(s+\alpha-1,\chi)\overline{\chi}(\ell).$$

Le membre de droite est holomorphe pour $Re(s) > \theta_k + 1 - \alpha$ ainsi qu'au voisinage de $\theta_k + 1 - \alpha$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe pour $Re(s) > \xi + 1 - \alpha$ pour $\xi < \theta_k$, par suite $g(x)$, et donc $\mathcal{P}(x)$, est $\Omega_\pm(x^{\xi+1-\alpha})$.

S'il existe un zéro d'une fonction de Dirichlet de partie réelle θ_k alors $G(s)$ a un pôle d'ordre 1 sur la droite $Re(s) = \theta_k + 1 - \alpha$ et par suite :

$$\mathcal{P}(x) = \Omega_\pm(x^{\theta_k+1-\alpha})$$

ce qui démontre (b).

. Prouvons (g) maintenant.

Nous avons maintenant $\theta_k = 1/2$, et alors, d'après le lemme 2, $J(x;\alpha) \sim \frac{(1-\epsilon)}{3/2-\alpha} x^{3/2-\alpha}$ est du même ordre que $I(x;\alpha,0)$.

Soit $\rho_0 = 1/2 + it_0$, le zéro, d'ordonnée positive minimum, des fonctions $L(s,\chi)$, $\chi \neq \chi_0$. Si m est son ordre de multiplicité on a :

$$G(s) \sim \frac{1}{\rho_0(\rho_0+1-\alpha)} \frac{\overline{\chi}(l)m}{s-(\rho_0+1-\alpha)} \text{ lorsque } s \to \rho_0 + 1 - \alpha.$$

Posons

$$\delta = \frac{m}{|\rho_0||\rho_0+1-\alpha|};$$

d'après le théorème de Landau (cf. [GRO]) on aura

$$\mathcal{P}(x) = \Omega_\pm(x^{3/2-\alpha}) \text{ si } \delta > \frac{|1-\epsilon|}{3/2-\alpha}.$$

Définissons $\beta_{k,l}$ par l'égalité suivante

$$\frac{1}{|\rho_0 t_0|} = \frac{|1-\epsilon|}{3/2-\beta_{kl}}$$

Les tables de SPIRA (cf. [SPI]) et de HASELGROVE - DAVIES (cf. [HAS]) nous permettent alors de résoudre le problème dans les cas suivants :

k	t_0	β_{k1}
23	0,59542	1,0184
43	0,83640	-2,1299
67	0,60431	0,7358
163	0,20290	1,3699

Remarque finale.— Pour les valeurs $k = 11$, $k = 13$, qui sont les premières valeurs non étudiées dans la partie (c), on n'a pas su trouver simplement le comportement de $P(x)$. Il faudrait utiliser des améliorations du théorème de Landau telles que l'on peut les trouver dans les articles de Grosswald, Anderson et Stark (cf. [GRO], [AND]).

Références

[AND] ANDERSON (R.B.) et STARK (H.M.). — *Oscillation theorems.* — Lectures notes n°899, Analytic number theory, 1980.

[BEN] BENTZ (H.J.). — Discrepancies in the Distribution of Prime Numbers, *Journ. of number theory*, t. **15**, 1982, p. 252-274.

[BRE] BRENT (R.P.). — Irregularities in the distribution of primes and twin primes, *Math. of Comp,*, t. **29**, **Numb. 129**,**Janv.**, 1975, p. 43 -56.

[CHE] CHEN (W.W.L). — On the error term of the prime number theorem and the difference between the number of primes in the residue classes modulo4, *J.Lond. Math. Soc.(2)*, t. **23**, 1981, p. 24-40.

[DAV] DAVENPORT (H). — *Multiplicative number theory.* — Springer Verlag, 1967.

[ELL] ELLISON (J). — *Les nombres premiers.* — Hermann Paris. Actual. Scien. et Ind. n°**1366**,1975.

[GRO] GROSSWALD (E). — *Oscillation theorems. Conf. on the theory of arithmetic functions.* — Springer Lecture Notes **251**, 1971.

[HAR1] HARDY (G.H.) et LITTLEWOOD (J.E). — Contributions to the theory of the Riemann Zeta function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math*, t. **41**, 1917, p. 119-196.

[HAR2] HARDY (G.H) et WRIGHT (E.M.). — *An introduction to the theory of numbers.* Oxford, 1960.

[HAS] HASELGROVE (C.B.) et DAVIES (D). — The evaluation of Dirichlet L functions, *Proc. Roy. Soc. Ser.A*, t. **264**, 1961, p. 122-132.

[KNA] KNAPOWSKI (S.) et TURAN (P.). — *Comparative prime number theory*,I-VIII, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **13** 1962 p. 299-314, 315-342, 343-364; **14** 1963 p. 31-42, 43-63, 65-78, 241-250, 251-268.

[KNA] KNAPOWSKI (S.) et TURAN (P.). — *Further developments in the comparative prime number theory*,I-VIII, Acat Arith. **9** 1964 p. 23-40; **10** 1964 p. 293-313; **11** 1965 p. 115-127, 147-161, 193-202; **12** 1966 p. 85-96; **21** 1972 p. 193-201.

[LAN] LANDAU (E.). — Uber einige ältere Vermutungen and Behauptungen in der Primzahtheorie I, resp. II, *Math. Zeitschr.*, t. **1**, 1978, p. 1-124 resp. 213-219.

[LEE] LEECH (J.). — Note on the distribution of prime numbers, *J.London Math. Soc.*, t. **32**, 1957, p. 56-58.

[PIN] BENTZ (H.J.) et PINTZ (J.). — Quadratic residues and the distribution of primes numbers, *Monat sh. Math.*, t. **90**, 1980 n°2, p. 91-100.

[SHA] SHANKS (D.). — Quadratic residues and the distribution of primes, *Math. Tables Aids Comput*, t. **13**, 1952, p. 272-284.

[SPI] SPIRA (R.). — Calculation of Dirichlet L functions, *Math. Comp.*, t. **3**, 1969, p. 489-498.

[STA] Stark (H.M.). — A problem in comparative prime number theory, *Acta Arithmetica*, t. **XVIII**, 1971, p. 311-320.

(Manuscrit reçu le 7 décembre 1985)