Über ein Vermutung von Tschebyschef. II.

Besenfelder, H.-J.

in: Journal für die reine und angewandte
Mathematik - 313 | Periodical
7 page(s) (52 - 58)

Über eine Vermutung von Tschebyschef. II

Von *H.-J. Besenfelder* in Osnabrück

1. Einleitung

In [12] wurde gezeigt, daß

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \frac{\log p}{\sqrt{p}} \cdot e^{-(\log^2 p)/x} = -\infty \tag{1}$$

unabhängig von jeder Vermutung richtig ist.

Das besondere Interesse an dem Verhalten von Reihen des Typs in (1) liegt in dem engen Zusammenhang zur Lage der nichttrivialen Nullstellen der speziellen Dirichletschen L-Reihe $L(s,\chi_1)$, wo χ_1 der Nichthauptcharakter $\bmod 4$ ist, begründet. Es ist bekannt, daß die Wahrheit der Tschebyschefschen Vermutung

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot e^{-p/x} = -\infty \tag{2}$$

äquivalent ist einem Analogon zur Riemannschen Vermutung:

$$L(s,\chi_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} \qquad [4], [8]. \tag{3}$$

Das gleiche gilt für die ähnliche Beziehung

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \log p \cdot e^{-p/x} = -\infty. \tag{4}$$

Knapowski und Turan [6], [7] haben herausgefunden, daß auch

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \log p \cdot e^{-\log^2(p/x)} = -\infty \tag{5}$$

bzw.

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot e^{-\log^2(p/x)} = -\infty \tag{6}$$

äquivalent zu (3) ist. [1])

[1]) Turan behauptet [11] diese Eigenschaft im Zusammenhang mit der Reihe $\sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot e^{-(\log^2 p)/x}$, vermutlich ist aber $\sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot e^{-\log^2(p/x)}$ gemeint.

0075-4102/80/0313-0004$02.00

Der Übergang von (4) nach (2) erfordert einige Mühe (siehe [4] und [15]), der Übergang von (5) nach (6) wurde zwar von Turan [11] angekündigt, ist aber bis heute nicht (explizit) veröffentlicht.

Hier soll gezeigt werden, daß neben (1) auch

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \frac{\log p}{p^\alpha} \cdot e^{-(\log^2 p)/x} = -\infty \tag{7}$$

für alle α mit $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ richtig ist. Auch (7) gilt unabhängig von jeder Vermutung. Daneben liefert die verwendete Methode einen guten Einblick in die Art der Divergenz (Größenordnung) des Ausdrucks in (7).

Daher kann also nun die Summation von

$$\sum_{p>2} \chi_1(p) \cdot \frac{\log p}{p^\alpha} f(p)$$

mittels der konvergenzerzeugenden Faktoren $f(p) = e^{-(\log^2 p)/x}$ für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ als vollständig bekannt angesehen werden.

2. Explizite Formeln

Wir übernehmen aus [13] die Explizite Formel

$$\begin{aligned}(8)\qquad \lim_{T\to\infty} \sum_{|\gamma|<T} 2\sqrt{\pi y} \cdot e^{y(\varrho-\alpha)^2} &= \log \frac{4}{\pi} - \sum_{p,n} \log p \cdot p^{-n\alpha} \cdot e^{-\log^2 p^n/4y} \cdot \chi_1(p^n) \\ &- \sum_{p,n} \log p \cdot p^{-n(1-\alpha)} \cdot e^{-\log^2 p^n/4y} \cdot \chi_1(p^{-n}) - C + \int_0^\infty \frac{e^{-x^2/4y+\alpha x} - 1}{1-e^{2x}}\, dx \\ &+ \int_0^\infty \frac{e^{-x^2/4y+(1-\alpha)x} - 1}{1-e^{2x}}\, dx\,,\end{aligned}$$

die aus der allgemeinen nach Einsetzen der Funktion

$$F(x) = e^{\frac{-x^2}{4y} + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x}, \ \alpha \text{ reell}, y > 0 \text{ reell},$$

entsteht.

Wählen wir $\alpha = \frac{1}{2}$, so fallen auf der rechten Seite von (8) die unsymmetrischen Bestandteile zusammen und es läßt sich die Beziehung (1) gewinnen. Für sonstige Werte von α bleibt (8) unter der Substitution $\alpha \to 1-\alpha$ invariant, da mit $\varrho_1 = \sigma + i\gamma$ hier auch $\varrho_2 = \sigma - i\gamma$ sowie eventuell $\varrho_3 = 1 - \sigma + i\gamma$, $\varrho_4 = 1 - \sigma - i\gamma$ Nullstellen von $L(s, \chi_1)$ sind. Wir beschränken daher unsere Untersuchung auf $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ und formen (8) um:

$$(9)\qquad \sum_{p>2} \log p\cdot p^{-\alpha}\cdot e^{-\log^2 p/4y}\cdot \chi_1(p)=\log\frac{4}{\pi}-C+\int_0^\infty \frac{e^{-x^2/4y+\alpha x}-1}{1-e^{2x}}\,dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}+(1-\alpha)x}-1}{1-e^{2x}}\,dx-\sum_{\substack{p>2\\ n=2}} \log p\cdot p^{-2\alpha}\cdot e^{-\log^2 p/y}\cdot \chi_1(p^2)$$

$$-\sum_{\substack{p>2\\ n\geqq 3}} \log p\cdot p^{-n\alpha}\cdot e^{-\log^2 p^n/4y}\cdot \chi_1(p^n)$$

$$-\sum_{p,n} \log p\cdot p^{-n(1-\alpha)}\cdot e^{-\log^2 p^n/4y}\cdot \chi_1(p^n)-\sum_{\varrho(\chi_1)}{}^{*}\, 2\sqrt{\pi y}\cdot e^{(\varrho-\alpha)^2}.$$

Hier beachte man, daß

(i) für diejenigen Primzahlen p, über welche die Summen laufen, stets $\chi_1(p)=(-1)^{(p-1)/2}$ ist, also die linke Seite von (9) bereits der linken Seite von (7) entspricht,

(ii) $\chi_1(p^2)$ stets gleich $+1$ ist,

(iii) der Stern am Summenzeichen von $\sum\limits_{\varrho}^{*}$ daran erinnert, daß die Nullstellen ϱ nach wachsendem Betrag ihrer Ordinaten γ geordnet sind.

3. Einige Hilfssätze

Nun vereinfachen wir die rechte Seite von (9) durch die folgenden Hilfssätze.

Lemma 1. *Die Integrale* $\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}+\alpha x}-1}{1-e^{2x}}\,dx$ *und* $\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}+(1-\alpha)x}-1}{1-e^{2x}}\,dx$ *bleiben beschränkt für* $y\to\infty$ *und* $0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$.

Der *Beweis* verläuft analog dem Fall $\alpha=\frac{1}{2}$ in Teil I.

Lemma 2. $\sum\limits_{\substack{p>2\\ n=2}} \log p\cdot p^{-2\alpha}\cdot e^{-\log^2 p/y}\sim\sqrt{\pi y}\cdot e^{\frac{y}{4}(1-2\alpha)^2}$ *für* $y\to\infty$ *und* $0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$.

Beweis. Nach Abelscher Summation ist

$$\sum_{2<p<X}\frac{\log p}{p}\cdot p^{(1-2\alpha)}\,e^{-\log^2 p/x}=-\int_3^X\left(\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}\right)\cdot\psi'(x)\,dx+\sum_{p\leqq X}\frac{\log p}{p}\cdot\psi(X),$$

wobei $\psi(x)=x^{1-2\alpha}\cdot e^{-(\log^2 x)/y}$ gesetzt ist. Verwendet man, daß

$$(10)\qquad \sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)\qquad \text{für große } x$$

gilt, so erreicht man zunächst, daß $\sum\limits_{p\leqq X}\frac{\log p}{p}\cdot\psi(X)$ verschwindet, für $X\to\infty$.

Der Integralausdruck wird für $X \to \infty$ zu

$$(11)\quad \begin{aligned} &-\int_3^\infty \log x \cdot e^{-\log^2 x/y} \cdot x^{-2\alpha}(1-2\alpha)\,dx + \frac{2}{y}\int_3^\infty \log^2 x \cdot e^{-\log^2 x/y} \cdot x^{-2\alpha}\,dx \\ &-\int_3^\infty \beta(x)\, e^{-\log^2 x/y} \cdot x^{-2\alpha}(1-2\alpha)\,dx + \frac{2}{y}\int_3^\infty \beta(x) \cdot e^{-\log^2 x/y - 2\alpha} \log x\,dx, \end{aligned}$$

wobei $\beta(x)$ eine Funktion ist, die für großes x beschränkt bleibt (also dem $O(1)$ Term in (10) entspricht).

Die wesentliche Größenordnung wird von dem zweiten dieser vier Integrale erbracht, und man erhält diese nach Umformen schließlich mit

$$2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{y}{4}(1-2\alpha)^2} \int_{-\frac{1-2\alpha}{2}\sqrt{y}}^{\infty} z^2 \cdot e^{-z^2}\,dz \sim \sqrt{\pi y}\, e^{\frac{y}{4}(1-2\alpha)^2} \quad \text{für großes } y.$$

Man beachte hierzu, daß bei der Berechnung des Ausgangsintegrales ein Term von noch höherer Größenordnung auftaucht, der sich jedoch gegen einen entsprechenden aus dem ersten der vier Integrale in (11) identisch weghebt.

Lemma 3. $\sum\limits_{\varrho(\chi_1)}^{*} 2\sqrt{\pi y} \cdot e^{y(\varrho-\alpha)^2} = o(1)$ *für* $y \to \infty$ *und* $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$.

Der *Beweis* beruht auf der Tatsache, daß die erste überhaupt auftretende Nullstelle von $L(s, \chi_1)$ den Imaginärteil $\gamma = 6, \ldots$ besitzt, weshalb der Exponent $y(\varrho-\alpha)^2$ stets negativ bleibt. Weiterhin benötigt man die Dichte der Nullstellen $\varrho(\chi_1)$ im kritischen Streifen. Die zugehörige Rechnung verläuft analog den Ausführungen in Teil I.

Lemma 4. *Die Summe* $\sum\limits_{p,n=k} \log p \cdot p^{-k\alpha} \cdot e^{-\log^2 p^k/4y} \cdot \chi_1(p^k)$ *ist bei* $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ *stets von größerer Größenordnung als* $\sum\limits_{p,n=k} \log p \cdot p^{-k(1-\alpha)} \cdot e^{-\log^2 p^k/4y} \cdot \chi_1(p^k)$ *für* $y \to \infty$.

Zum *Beweis* bemerke man, daß die beiden Summen sich nur im Exponenten von p unterscheiden. Hierbei jedoch ist $-k(1-\alpha)$ für die gewählten α stets kleiner als $-k\alpha$.

4. Der Hauptsatz

Aus (9) ergibt sich nun für großes y

$$(12)\quad \begin{aligned} \sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \log p \cdot p^{-\alpha} \cdot e^{-\log^2 p/4y} = &-\sum_{p>2} \log p \cdot p^{-2\alpha} \cdot e^{-\log^2 p/y} \\ &-\sum_{\substack{p>2\\ n\geqq 3}} \log p \cdot p^{-n\alpha} \cdot e^{-\log^2 p^n/4y} \cdot \chi_1(p^n) \\ &+ R(y), \end{aligned}$$

wobei $R(y)$ von geringerer Größenordnung als $\sqrt{\pi y} \cdot e^{\frac{y}{4}(1-2\alpha)^2}$ ist, nach den Hilfssätzen aus Abschnitt 3.

Sei nun etwa $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, dann bleibt für $y \to \infty$ die Summe $\sum\limits_{\substack{p>2\\ n\geqq 3}} \cdots$ in (12) beschränkt, wie der Vergleich mit

$$\sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) < \infty \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

zeigt [9].

Wir halten als Zwischenresultat fest:

Lemma 5. *Für* $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ *gilt*

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \log p \cdot p^{-\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\log^2 p/4y} \sim -\sqrt{\pi y}\, \mathrm{e}^{\frac{y}{4}(1-2\alpha)^2}.$$

Gehen wir nun mit α weiter nach links, so treten neue divergente Summen aus $\sum\limits_{\substack{p>2\\ n\geqq 3}} \cdots$ hinzu, und zwar für endlich viele n.

Wir kennen aber deren Verhalten, weil sie für größeres α bereits aufgetaucht sind. Ihr Wachstum richtet sich nach dem jeweils im vorherigen Schritt maximalen Term „$p^{-2\alpha}$" (gemäß Lemma 2).

Diese Überlegung zusammen mit (1) liefert den

Satz. *Es gilt unabhängig von jeder Vermutung*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \log p \cdot p^{-\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\log^2 p/4y} = -\infty \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}.$$

Die Größenordnung wird für $\alpha = \frac{1}{2}$ *durch* $\frac{1}{2}\sqrt{\pi y}$ *und für* $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ *durch* $\sqrt{\pi y}\, \mathrm{e}^{\frac{y}{4}(1-2\alpha)}$ *gegeben.*

Der im Satz eingeschlossene Fall $\alpha = 0$ ergibt sich aus dem Umstand, daß in der für $y \to \infty$ divergierenden Summe $\sum\limits_{\substack{p>2\\ n\geqq 2}} \chi_1(p^n) \cdot \log p \cdot \mathrm{e}^{-\log^2 p^n/4y}$ die Teilsumme über die Primzahl*quadrate* auch weiterhin die Größenordnung bestimmt. Dies zeigt der Vergleich der Exponenten

$$-\log^2 p/4y, \quad -\log^2 p/y, \quad -\log^2 p/\frac{4}{9}y, \quad \ldots, \quad -\log^2 p/\frac{4}{n^2}y, \quad \ldots .$$

Bemerkung 1. Die Untersuchungen der vorigen Abschnitte zeigen, daß sich

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\log p}{p^{\alpha}} \cdot \mathrm{e}^{-\log^2 p/x} =: S(x, \alpha)$$

„vernünftig" verhält. Dies soll heißen, daß $S(x, \alpha+\varepsilon)$ „schwächer" divergiert als $S(x, \alpha)$, sofern $\varepsilon > 0$ ist und „stärker" divergiert, falls $\varepsilon < 0$ ist. Anschaulich bedeutet dies, daß jeder Summand von $S(x, \alpha)$ mit dem stärker bzw. schwächer Konvergenz erzeugenden (monotonen) Faktor p^{ε} multipliziert wird.

Bemerkung 2. Diese Eigenschaft legt den Versuch nahe, direkt von $S(x, \alpha)$ nach (2) oder (4) zu gelangen, und zwar mittels gliedweiser Multiplikation mit

$$g(p) = \frac{e^{-p/x}}{e^{-(\log^2)/x}}.$$

Leider ist $g(p)$ jedoch monoton fallend für größer werdendes p, weshalb der Schluß von der Divergenz von $S(x, \alpha)$, $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, auf jene von

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \log p \cdot e^{-p/x} =: T(x)$$

noch nicht zwingend ist.

Man muß wohl zur weiteren Erforschung den Umstand ausnutzen, daß die Parameter x in $S(x, \alpha)$ und $T(x)$ voneinander unabhängig nach ∞ gehen dürfen.

Betrachtet man etwa $S(h(x), \alpha)$ und $T(x)$, wo h eine mit $x \to \infty$ über alle Grenzen anwachsende Funktion von x ist, so lassen sich durch geeignete Wahl von h und Verwendung des Faktors

$$\tilde{g}(p) = \frac{e^{-p/x}}{e^{-(\log^2 p)/h(x)}}$$

aus $S(h(x), 0)$ z.B. Aussagen der folgenden Art gewinnen:

„*Falls* (4) *beschränkt bleibt, also insbesondere* (3) *falsch ist, so geht der Abschnitt*

$$\sum_{A(x) \leqq p \leqq B(x)} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \log p \cdot e^{-p/x}$$

für großes x nach $+\infty$. *Die Grenzen* $A(x)$, $B(x)$ *gehen dabei (natürlich) ebenfalls nach* ∞ *und hängen von der Wahl von h ab.*"

Diese momentan noch mehr heuristische Erkenntnis ist besonders interessant im Zusammenhang mit einem Satz von Knapowski und Turan [6], [14]:

„*Zur Zahl* $T > c$, *c fest und errechenbar, existieren Zahlen* U_1, U_2, U_3, U_4 *mit*

$$\log\log\log T \leqq U_2 \cdot e^{-\log^{15/16} U_2} \leqq U_1 < U_2 \leqq T,$$

$$\log\log\log T \leqq U_4 \cdot e^{-\log^{15/16} U_4} \leqq U_3 < U_4 \leqq T$$

derart, daß

$$\sum_{U_1 < p < U_2} (-1)^{(p-1)/2} \log p > \sqrt{U_2}$$

und

$$\sum_{U_3 < p < U_4} (-1)^{(p-1)/2} \log p < -\sqrt{U_4}$$

gilt."

Bemerkung 3. Da man mit (4) ebenfalls wie mit (2) eine zu (3) äquivalente Beziehung zur Verfügung hat, wo wie in (7) der $\log p$ Faktor enthalten ist, scheint ein Entfernen dieses Faktors aus (7) nicht besonders dringlich zu sein. Dieselben „heuristischen" Überlegungen wie oben lassen allerdings stark vermuten, daß sich an dem Verhalten der Reihen in (7) bezüglich Konvergenz und Divergenz durch die Abwesenheit von $\log p$ nichts ändert.

Um eine definitive Aussage hierzu zu erhalten, bieten sich die Methoden von Landau [15] bzw. Hardy und Littlewood [4] an.

Literatur

[1] *H.-J. Besenfelder*, Die Weilsche „Explizite Formel“ und Temperierte Distributionen, J. reine angew. Math. **293/294** (1977), 228—257.

[2] *I. N. Bronstein*, *K. A. Semendjajew*, Taschenbuch der Math., Zürich 1968.

[3] *D. Davies*, *C. B. Haselgrove*, The evaluation of Dirichlet *L*-functions, Proc. Royal Soc. Ser. A, **264** (1961), 122—132.

[4] *G. H. Hardy*, *J. E. Littlewood*, Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes, Acta Math. **41** (1917), 119—196.

[5] *A. E. Ingham*, The Distribution of Prime Numbers, New York 1971.

[6] *S. Knapowski*, *P. Turan*, Further developments in the comparative prime number theory. II, Acta Arithm. **10** (1964), 293—313.

[7] *S. Knapowski*, *P. Turan*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis (Hrsg. P. Turan), Berlin 1968, 159—171.

[8] *E. Landau*, Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, Math. Zeitschrift **1** (1918), 1—24.

[9] *K. Prachar*, Primzahlverteilung, Berlin 1957.

[10] *P. L. Tschebyschef*, Lettre de M. le professeur Tchébychev à M. Fuss sur un nouveau theórème relativ aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$, Bull. Classe Phys. de l'Acad. Imp. Sciences St. Petersburg **11** (1853), 208.

[11] *P. Turan*, Commemoration on Stanislaw Knapowski, Colloquium Mathematicum **23** (1971), 309—321.

[12] *H.-J. Besenfelder*, Über eine Vermutung von Tschebyschef. I, J. reine angew. Math. **307/308** (1979), 411—417.

[13] *H.-J. Besenfelder*, Primzahlen in arithmetischen Progressionen und Explizite Formeln, erscheint in: Studia Sci. Math. Hungarica.

[14] *S. Knapowski* und *P. Turan*, Further developments in the comparative prime number theory. VII, Acta Arithmetica **21** (1975), 190—198.

[15] *E. Landau*, Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie. II, Math. Zeitschrift **1** (1918), 213—219.

Fachbereich 6 Mathematik/Philosophie der Universität, D-4500 Osnabrück

Eingegangen 20. Dezember 1978