Über eine Vermutung von Tschebyschef. I

Von *Hans-J. Besenfelder* in Osnabrück

1. Einleitung

Tschebyschef behauptete im Jahre 1853 in einem Brief an Fuss [10], er könne beweisen, daß

$$(1) \qquad \lim_{x \to \infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot e^{-p/x} = -\infty$$

ist. Da den Primzahlen der Gestalt $4m+1$ das positive und den Primzahlen $4m+3$ das negative Vorzeichen entspricht, läßt sich aus (1) eine gewisse Art des „Überwiegens" der Primzahlen $\equiv 3 \bmod 4$ über jene $\equiv 1 \bmod 4$ ablesen. Daß ein Überwiegen im „natürlichen" Sinne, nämlich

$$\pi(x, 4, 1) - \pi(x, 4, 3) \to -\infty$$

falsch ist, wurde von Hardy und Littlewood [4] gezeigt. Sie hatten sogar bewiesen, daß

$$\lim_{x \to \infty} \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \{\pi(x, 4, 1) - \pi(x, 4, 3)\} = \pm \infty$$

ist.

Landau hat öfter angezweifelt, daß Tschebyschef im Besitz eines (richtigen) Beweises gewesen sei, wohl nicht zuletzt deshalb, weil, wie er zeigen konnte, aus (1) die Behauptung

$$(2) \qquad L(s, \chi_1 \bmod 4) \neq 0 \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2},$$

wo χ_1 der Nichthauptcharakter mod 4 ist, folgen würde [8]. Nach seiner Einschätzung ist nämlich die Aussage (2) von der Tiefe der — analogen — unbewiesenen Riemannschen Vermutung über die Zetafunktion:

$$(3) \qquad \zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2},$$

und dies „erhöht für Ungläubige die Wahrscheinlichkeit, daß Tschebyschef sich geirrt hat, und für Gläubige den Wunsch, aus seinen Papieren den Beweis von (1) rekonstruiert zu sehen" — wie Landau bemerkt [8].

0075-4102/79/0307-0026$02.00

Daß umgekehrt aus (2) auch (1) folgt, hätten kurz zuvor Hardy und Littlewood gefunden [4].

In einer langen Reihe von Arbeiten haben Knapowski und Turan in den sechziger Jahren Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Primzahlen (auch in speziellen Progressionen) untersucht und hochinteressante Ergebnisse erzielt. Ein Überblick hierzu und auch eine ausführliche Literaturliste findet sich in Turans Nachruf auf seinen im Jahre 1967 verunglückten Mitautor [11]. In dieser Schrift ist auf eine weitere zu (2) äquivalente Beziehung hingewiesen, nämlich

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \log p \cdot e^{-\log^2(p/x)} = -\infty. \tag{4}$$

Hier wird nun mit Hilfe einer Expliziten Formel gezeigt, daß

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \cdot \frac{\log p}{\sqrt{p}} \cdot e^{-(\log^2 p)/x} = -\infty \tag{5}$$

unabhängig von jeder Vermutung richtig ist. Dies läßt sich gewinnen, weil die erste überhaupt auftretende nichttriviale Nullstelle von $L(s, \chi_1)$ „genügend weit" von der reellen Achse entfernt liegt.

Die Reihe in (5) bietet jetzt einen sicheren Ausgangspunkt, um möglicherweise ohne noch tiefere Kenntnis über die Verteilung der Primzahlen — etwa mittels geschickter Summationstechnik — den Übergang nach (1) zu erreichen, womit das Nichtverschwinden von $L(s, \chi_1)$ für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ ebenfalls gesichert wäre.

In einer weiteren Arbeit mit gleichlautendem Titel, Teil II, wird das Verhalten der obigen Reihe mit

$$p^{\alpha},\ 0 \leqq \alpha \leqq 1, \text{ anstelle } p^{\frac{1}{2}} \text{ im Nenner,}$$

untersucht werden.

2. Explizite Formeln

Die Gleichung (5) ist das Substrat aus einer speziellen Expliziten Formel. Wir wollen diese zunächst herleiten. In [1] wurde gezeigt, daß die allgemeine Explizite Formel

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \sum_{\substack{\rho=\sigma+i\gamma \\ |\gamma|<T}} M(\rho) &= \varepsilon_0 \{M(0) + M(1)\} + F(0) \cdot \log \frac{f}{\pi} \\
&\quad - \sum_{p,n} \log p \cdot p^{-\frac{n}{2}} \{\chi(p^n) \cdot F(\log p^n) + \chi(p^{-n}) \cdot F(\log p^{-n})\} \\
&\quad - C \cdot F(0) + \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x) \cdot e^{(\frac{3}{2}-\delta)|x|} - F(0)}{1 - e^{2|x|}}\, dx
\end{aligned} \tag{6}$$

besteht, und zwar für eine gewisse Klasse von Funktionen F und deren Mellintransformierte M. Es wird in (6) auf der linken Seite über die im kritischen Streifen liegenden Nullstellen ρ von $L(s, \chi)$ nach wachsenden Ordinaten summiert. Auf der rechten

Seite ist ε_0 gleich 1 für den Hauptcharakter $\chi = \chi_0$ und $=0$ für jeden Nichthauptcharakter. f ist der „Führer" des Charakters χ, C die Eulersche Konstante $(=0{,}577\ldots)$ und

$$\delta = \delta(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi(-1) = -1 \\ 0 & \text{für } \chi(-1) = 1. \end{cases}$$

Die Doppelsumme läuft über alle Primzahlen und über die natürlichen Zahlen, das Kürzel „v.p." weist darauf hin, daß im Falle einer bei 0 unstetigen Funktion F der Hadamardsche Hauptwert zu nehmen ist.

Wir rechnen nun die (zulässige) Funktion

$$F(x) = e^{-x^2/4y}, \text{ mit dem Parameter } y > 0 \text{ reell,}$$

in die Formel (6) ein und betrachten dabei den uns interessierenden, speziellen Fall

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1 \bmod 4).$$

Wir erhalten nacheinander:

a) $M(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{\left(s-\frac{1}{2}\right)x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4y + \left(s-\frac{1}{2}\right)x} dx.$

Wegen $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ ergibt sich

$$M(s) = 2\sqrt{\pi y}\, e^{y\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

b) ε_0 ist 0, da χ_1 Nichthauptcharakter ist.

c) Der Führer f hat hier den Wert 4, es wird also

$$\log \frac{f}{\pi} = \log \frac{4}{\pi}.$$

d) Da $\chi_1(p^n) = \chi_1(p^{-n})$ ist, und für gerades Argument verschwindet, nimmt die Doppelsumme die Gestalt

$$-2 \sum_{p^n,\, p \neq 2} \chi(p^n) \cdot \frac{\log p}{p^{n/2}} \cdot e^{-(\log^2 p^n)/4y}$$

an, wobei $\log^2$ wie üblich das Quadrat des Logarithmus bezeichnet.

e) Die Funktion F ist bei 0 stetig und hat dort den Wert 1, δ ist in unserem Falle gleich -1, weshalb wir

$$-C + 2 \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4y} + \frac{x}{2}} - 1}{1 - e^{2x}}\, dx$$

erhalten.

Insgesamt ergibt sich die spezielle Formel

$$(7)\quad \begin{aligned} 2\sqrt{\pi y}\cdot \sum_{\rho(\chi_1)}{}^{*} e^{y(\rho-\frac{1}{2})^2} &= \log\frac{4}{\pi} - 2\sum_{p^n,\, p\neq 2} \chi_1(p^n)\cdot\frac{\log p}{\sqrt{p^n}}\cdot e^{-(\log^2 p^n)/4y} \\ &\quad - C + 2\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}+\frac{x}{2}}-1}{1-e^{2x}}\,dx, \end{aligned}$$

wo der Stern am Summenzeichen an die Summationsvorschrift erinnern soll.

Wir werden nun die Gleichung (7) für große y betrachten und schätzen zur Vereinfachung die einzelnen Terme ab.

3. Verhalten der $\sum^*$ bei großem y

Wir verwenden hier folgende bekannte Tatsachen über die Lage der Nullstellen ρ von $L(s, \chi_1 \bmod 4)$ im kritischen Streifen.

a) Die erste überhaupt auftretende Nullstelle $\rho = \sigma + i\gamma$ mit $0 < \sigma < 1$ hat die Ordinate $\gamma = 6, \ldots$ [3].

b) Die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi_1)$ im Rechteck $0 < \sigma < 1$ und $T \leqq |\gamma| \leqq T+1$ ist von der Größenordnung

$$O(\log T) \quad \text{für} \quad T \to \infty \text{ [9]}.$$

Lemma 1. *Für $y \to \infty$ verschwindet*

$$2\sqrt{\pi y}\cdot \sum_{\rho(\chi_1)}{}^{*} e^{y(\rho-\frac{1}{2})^2}.$$

Beweis. Es ist

$$\left|2\sqrt{\pi y}\, e^{y\{(\sigma-\frac{1}{2})^2-\gamma^2+2i(\sigma-\frac{1}{2})\gamma\}}\right| \leqq 2\sqrt{\pi y}\, e^{-y(\gamma^2-\frac{1}{4})} = e^{-3y/4}\cdot 2\sqrt{\pi y}\cdot e^{-y(\gamma^2-1)},$$

wegen a) ist der Exponent $-y(\gamma^2-1)$ weiterhin stets negativ.

Wegen b) ist

$$\left|\sum_{\rho}{}^{*} 2\sqrt{\pi y}\, e^{-y(\gamma^2-1)}\right| \sim k\cdot\left|\int_0^\infty e^{-y\omega^2}\log\omega\, d\omega\right| = k\cdot\left|-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,\{C+\log 4y\}\right|,$$

wo k eine positive Konstante ist, also insgesamt

$$e^{-3y/4}\cdot\left|\sum_{\rho}{}^{*} 2\sqrt{\pi y}\, e^{-y(\gamma^2-1)}\right| \sim e^{-3y/4}\cdot O(\log y).$$

q.e.d.

4. Das Verhalten des Integrals

Lemma 2. *Es ist*

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}+\frac{x}{2}}-1}{1-e^{2x}}\,dx = O(1) \quad \text{für} \quad y \to \infty.$$

Beweis. Der Wert des Integranden bei $x=0$ ist endlich $\left(\text{nämlich } -\frac{1}{4}\right)$ und unabhängig von y, zudem fällt der Integrand exponentiell für $x \to \infty$, wir können daher nach dem Lebesgue'schen Satz von der dominierenden Konvergenz die Grenzübergänge vertauschen und berechnen

$$2\int_0^\infty \frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{1-e^{2x}}\,dx.$$

Dieses wird nach der Substitution $e^{\frac{x}{2}}=z$ und nach Umwandlung in Partialbrüche zu

$$-2\int_1^\infty \left(\frac{2}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{z+1}{z^2+1}\right)dz = -3\log 2+\frac{\pi}{2} \quad (\approx -0{,}50\ldots),$$

womit das Lemma bewiesen ist.

5. Das Verhalten der Reihen

Die Gleichung (7) wird nach Lemma 1 und 2 bei großem y vereinfacht zu

$$\sum_{p^n,\, p \neq 2} \chi_1(p^n)\cdot\frac{\log p}{\sqrt{p^n}}\cdot e^{-(\log^2 p^n)/4y} = O(1). \tag{8}$$

Um hieraus die in der Einleitung behauptete Beziehung (5) zu entwickeln, sind nur noch die Teilsummen über die höheren ($n \geqq 2$) Primzahlpotenzen abzuschätzen. Dazu verwenden wir die bekannte Gleichung

$$\sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) < \infty \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \text{ [9]}. \tag{9}$$

Es ist danach aus (8)

$$\left|\sum_{\substack{p^n,\, p\neq 2\\ n\geqq 3}} \chi_1(p^n)\frac{\log p}{\sqrt{p^n}}\cdot e^{-(\log^2 p^n)/4y}\right| \leqq 3\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{m\cdot\frac{3}{2}}} < \infty.$$

Wir stecken diese Teilsummen ebenfalls in $O(1)$ hinein. Da der Charakter χ_1 nur die Werte $+1$ und -1 für ungerade Argumente annimmt und stets

$$\chi_1(p^2) = \chi_1^2(p)$$

ist, liefert die Teilsumme über alle Primzahlquadrate ($n=2$) den Beitrag

$$\sum_{p>2} \frac{\log p}{p}\cdot e^{-(\log^2 p)/y}. \tag{10}$$

Nun ist bekanntlich

$$(11) \qquad \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \quad \text{für großes } x \text{ [5],}$$

womit sich schließen läßt, da $e^{-(\log^2 p)/y}$ für $y \to \infty$ punktweise monoton gegen 1 geht, daß auch (10) nach ∞ divergiert.

Für die ungeraden Primzahlen ist

$$\chi_1(p) = (-1)^{(p-1)/2},$$

wir erhalten also den angekündigten

Satz 1. $\lim\limits_{y \to \infty} \sum\limits_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \dfrac{\log p}{\sqrt{p}} \cdot e^{-(\log^2 p)/4y} = -\infty.$

6. Die genaue Größenordnung der Reihe in Satz 1

Die obige Methode erlaubt sogar eine Aussage zu machen über die Art der Divergenz von (5). Man muß dazu einfach (10) genauer studieren.

Lemma 3. $\sum\limits_{p>2} \dfrac{\log p}{p} \cdot e^{-(\log^2 p)/y} \approx \dfrac{1}{2} \sqrt{\pi y}$ *für* $y \to \infty$.

Beweis. Setze

$$C(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$$

und

$$\phi(x) = e^{-(\log^2 x)/y}.$$

Dann gilt (Abelsche Summation)

$$\sum_{2<p \leq X} \frac{\log p}{p} \cdot e^{-(\log^2 p)/y} = -\int_3^X C(x) \cdot \phi'(x) dx + C(X) \cdot \phi(X). \quad \text{[5], Theorem A.}$$

Wir verwenden nun wieder (11) und schließen damit zunächst, daß $C(X) \cdot \phi(X)$ für $X \to \infty$ verschwindet. Es bleibt nach Einsetzen von (11) im Integral:

$$\sum_{2<p \leq X} \frac{\log p}{p} \cdot e^{-\log^2 p/y} = \int_3^X \log x \cdot \frac{2}{y} \cdot \frac{\log x}{x} \cdot e^{-\log^2 x/y} dx + O(1) \quad \text{für großes } X.$$

Nun substituieren wir $\log x = w$ und erhalten rechts

$$= \frac{2}{y} \int_{\log 3}^{\log X} w^2 \cdot e^{-w^2/y} dw + O(1).$$

Da $\int\limits_0^\infty w^2 \cdot e^{-w^2 a^2} dw = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ für $a>0$ gilt [2], S. 350, ergibt sich das gesuchte Resultat

$$= \frac{2}{y} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot y^{3/2} + O(1) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi y} + O(1).$$

Literaturverzeichnis

[1] *H.-J. Besenfelder*, Die Weilsche „Explizite Formel" und Temperierte Distributionen, J. reine angew. Math. **293/294** (1977), 228—257.

[2] *I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew*, Taschenbuch der Math., Zürich 1968.

[3] *D. Davies, C. B. Haselgrove*, The evaluation of Dirichlet *L*-functions, Proc. Royal Soc. Ser. A, **264** (1961), 122—132.

[4] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood*, Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes, Acta Math. **41** (1917), 119—196.

[5] *A. E. Ingham*, The Distribution of Prime Numbers, New York 1971.

[6] *S. Knapowski, P. Turan*, Further developments in the comparative prime number theory. II, Acta Arithm. **10** (1964), 293—313.

[7] *S. Knapowski, P. Turan*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis (Hrsg. P. Turan), Berlin 1968, 159—171.

[8] *E. Landau*, Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, Math. Zeitschrift **1** (1918), 1—24.

[9] *K. Prachar*, Primzahlverteilung, Berlin 1957.

[10] *P. L. Tschebyschef*, Lettre de M. le professeur Tchébychev à M. Fuss sur un nouveau theórème relativ aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$, Bull. Classe Phys. de l'Acad. Imp. Sciences St. Petersburg **11** (1853), 208.

[11] *P. Turan*, Commemoration on Stanislaw Knapowski, Colloquium Mathematicum **23** (1971), 309—321.

FB 6 Mathematik/Philosophie, Universität Osnabrück, D-4500 Osnabrück

Eingegangen 5. August 1978