Monatshefte für Mathematik 82, 199—206 (1976)

Bemerkungen zur Arbeit von S. Knapowski und P. Turán

Von

J. Pintz, Budapest

(Eingegangen am 30. Januar 1976)

Herrn Prof. Dr. E. Hlawka zum 60. Geburtstag gewidmet

Abstract

Notes to the Paper of S. Knapowski and P. Turán. The present paper shows that by an easy modification of the ideas of S. Knapowski and P. Turán [2] one can prove the following

Theorem 1: Let $V_1(Y)$ denote the number of sign changes of $\pi(x) - \operatorname{li} x$ in the interval $[2, Y]$. Then for $Y > C_1$ the inequality

$$V_1(Y) > C_2 (\log\log Y)^{C_3}$$

holds with positive effectively calculable constants C_1, C_2 and C_3.

1. Es ist das Ziel dieser Arbeit, zu zeigen, daß durch eine einfache Modifizierung der Idee von Knapowski-Turán [2] für die Anzahl $V_1(Y)$ der Vorzeichenänderungen von $\Delta_1(x) = \pi(x) - \operatorname{li} x$ im Intervall $[0, Y]$, eine schärfere Abschätzung angegeben werden kann, als sie in [2] gegeben wurde. Es besteht nämlich die Möglichkeit, einen weiteren Logarithmus wegzulassen.

Satz 1. *Es gibt positive, effektive Konstanten C_1, C_2, so daß für $Y > C_1$ die Ungleichung*

$$V_1(Y) > C_2 (\log_2 Y)^{C_3} \tag{1.1}$$

gilt.

Eine weitere Frage wäre, was wir von der Größenordnung von $\Delta_1(x)$ in den Punkten

$$x_1' < x_2' < \ldots < x_{N_0}' \leq Y$$

und
$$x_1'' < x_2'' < \ldots < x_{N_0}'' \leq Y,$$

wo
$$x_\nu' < x_{\nu+1}'',\ x_\nu'' < x_{\nu+1}',\ N_0 = C_2 (\log_2 Y)^{C_3},$$

sagen können, für welche wir die Ungleichungen $\Delta_1(x'_\nu) < 0$ bzw. $\Delta_1(x''_\nu) > 0$ garantieren. Das Ergebnis in Arbeit [2] liefert

$$\begin{aligned} \Delta_1(x'_\nu) &< -C_4 \frac{\sqrt{x}}{\log x}, \\ \Delta_1(x''_\nu) &> C_4 \frac{\sqrt{x}}{\log x}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Andererseits zeigte LITTLEWOOD [3] — was auch heute noch das beste Ergebnis dieser Art ist —, daß es unendlich viele

$$x'_1 < x'_2 < x'_3 < \ldots \infty,$$

und

$$x''_1 < x''_2 < x''_3 < \ldots \infty$$

gibt, für welche die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Delta_1(x'_\nu) &< -c' \frac{\sqrt{x}}{\log x} \log_3 x, \\ \Delta_1(x''_\nu) &> c' \frac{\sqrt{x}}{\log x} \log_3 x \end{aligned} \tag{1.3}$$

gelten. INGHAM [1] hat (1.3) mit $c' = \frac{1}{2} - o(1)$ bewiesen. Die Arbeit [2] bietet die Möglichkeit, für eine geringere Anzahl von x'_ν und x''_ν in $[0, Y]$ ebenfalls eine Oszillation von der Größenordnung (1.3) zu garantieren.

Es gilt nämlich folgender

Satz 2. *Es gibt effektive Konstanten C_5 und C_6, so daß für $Y > C_5$, $\mu \log_4 Y = D \geq C_6$, $H = [\exp((\log_3 Y)^{1-\mu})]$ H disjunkte Intervalle $I_\nu \subseteq [0, Y]$ ($\nu = 1, 2, \ldots, H$) und Zahlen $x'_\nu, x''_\nu \in I_\nu$ existieren, für welche die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \Delta_1(x'_\nu) &< -\left(\frac{1}{2} - 3\frac{\log D}{D}\right) \mu \frac{\sqrt{x}}{\log x} \log_3 x, \\ \Delta_1(x''_\nu) &> \left(\frac{1}{2} - 3\frac{\log D}{D}\right) \mu \frac{\sqrt{x}}{\log x} \log_3 x \end{aligned} \tag{1.4}$$

gelten.

Man kann hier ohne weiteres auch $x_\nu^{(i)} \geq \log^{1/10} Y$ annehmen, damit $\mu \log_3 x_\nu^{(i)} \geq \mu \log_4 Y - o(1) \geq D - o(1)$ gilt.

Satz 2 zeigt, daß die große Oszillation von (1.3) ziemlich oft abwechselnd in beide Richtungen auftritt.

2. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen der Arbeit [2] und werden nur auf solche Teile des Beweises hinweisen, in denen eine Modifizierung nötig ist. Die ohne weiteren Hinweise angegebenen Nummern von Formeln und Paragraphen bedeuten die entsprechenden Formeln der Arbeit [2].

Zunächst bemerken wir, daß wir, falls in § 11 anstatt im Intervall $[\frac{3}{4}\omega, \frac{5}{4}\omega]$ im Intervall $[\omega - \frac{1}{4}, \omega + \frac{1}{4}]$ integriert wird, falls also in der Formel (11.3) für y der Weg der Integration statt $[-A\omega/4, A\omega/4]$ das Intervall $[-A/4, A/4]$ ist, (11.4), (11.5) und (11.6) bekommen; nur der Wert der entsprechenden Konstante c_{13} wird größer.

Die zweite wesentliche Idee der Verbesserung besteht darin, daß wir in §§ 12, 13 nicht auf einmal alle Werte für ω_ν' und ω_ν'' angeben, sondern auch mittels des Dirichletschen Satzes die Werte für ω_ν' und ω_ν'' sukzessive konstruieren, wodurch eine viel bessere Lokalisierung von ω_ν' und ω_ν'' möglich wird.

Es sei $U = \log_2 Y$; $\|x\|$ bezeichne den Abstand von x von der nächsten ganzen Zahl. Die Zahlen C_j bedeuten absolute, positive, effektive Konstanten. Für alle $\nu \geqslant 1$ existieren ganze Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, für welche

$$\left\| \frac{\gamma_j}{2\pi} n_\nu \right\| \leqslant \frac{1}{\nu^2 \log^2 A} \ (j = 1, 2, \ldots, N(A);\ \nu = 1, 2, \ldots) \qquad (2.1)$$

gilt, so daß für die n_i die Ungleichungen

$$1 + \log U \leqslant n_1 \leqslant (1 + \log U)(\log^2 A + 1)^{N(A)} \qquad (2.2)$$

bzw.
$$1 \leqslant n_\nu \leqslant \left(1 + (\log^2 A)\nu^2\right)^{N(A)} \quad (\nu \geqslant 2) \qquad (2.3)$$

gelten.

Es sei nun

$$\omega_1' = \alpha_0 + n_1, \quad \omega_1'' = -\alpha_0 + n_1;$$

$$\omega_\nu' = \alpha_0 + M_\nu, \quad \omega_\nu'' = -\alpha_0 + M_\nu \quad \text{für} \quad \nu \geqslant 2,$$

wo $M_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} n_k$ und $\alpha_0 = (\log^2 A)/A$ wie in (11.7). Dann gilt für ein beliebiges $\nu \geqslant 1, j \leqslant N(A)$ die Ungleichung

$$\left\| \frac{\gamma_j}{2\pi} M_\nu \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} \left\| \frac{\gamma_j}{2\pi} n_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2 \log^2 A} < \frac{2}{\log^2 A}. \qquad (2.4)$$

So bekommen wir

$$
\begin{aligned}
&|\sin \gamma_j \omega'_\nu - \sin \gamma_j \alpha_0| \leqslant 2\pi \left\| \frac{\gamma_j}{2\pi}(\omega'_\nu - \alpha_0) \right\| < \frac{4\pi}{\log^2 A}, \\
&|\sin \gamma_j \omega''_\nu - \sin(-\gamma_j \alpha_0)| \leqslant 2\pi \left\| \frac{\gamma_j}{2\pi}(\omega''_\nu + \alpha_0) \right\| < \frac{4\pi}{\log^2 A},
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

und daraus folgen, wie in § 13, die Relationen

$$
\begin{aligned}
&2 \sum_{0<\gamma<A} \left(1 - \frac{\gamma}{A}\right) \frac{\sin \gamma \omega'_\nu}{\gamma} > \frac{1}{2} \log \frac{A}{\log^2 A} - C_7, \\
&2 \sum_{0<\gamma<A} \left(1 - \frac{\gamma}{A}\right) \frac{\sin \gamma \omega''_\nu}{\gamma} < -\left(\frac{1}{2} \log \frac{A}{\log^2 A} - C_7\right).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Mittels dieser Ungleichungen bekommt man ähnlich wie in § 13

$$
\begin{aligned}
&\min_{\omega'_\nu - 1/4 < \vartheta < \omega'_\nu + 1/4} e^{-\vartheta/2} \Delta_3(e^\vartheta) < -\left(\frac{1}{2} \log \frac{A}{\log^2 A} - C_8\right), \\
&\max_{\omega''_\nu - 1/4 < \vartheta < \omega''_\nu + 1/4} e^{-\vartheta/2} \Delta_3(e^\vartheta) > \frac{1}{2} \log \frac{A}{\log^2 A} - C_8.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Falls wir $\alpha_0 = (\log^2 A)/A \leqslant \frac{1}{12}$ (was für $A \geqslant C_9$ gilt), $M_1 \geqslant 1 + \log U$, $M_\nu - M_{\nu-1} = n_\nu \geqslant 1$ betrachten, bekommen wir die disjunkten Intervalle I^*_ν bzw. I_ν

$$
\begin{aligned}
&I^*_\nu = [M_\nu - \tfrac{1}{3}, M_\nu + \tfrac{1}{3}], \\
&I_\nu = [\exp(M_\nu - \tfrac{1}{3}), \exp(M_\nu + \tfrac{1}{3})]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

und Zahlen $\vartheta'_\nu, \vartheta''_\nu \in I^*_\nu$ bzw. $x'_\nu = e^{\vartheta'_\nu} \in I_\nu$, $x''_\nu = e^{\vartheta''_\nu} \in I_\nu$ mit der Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Delta_1(x'_\nu)}{\sqrt{x'_\nu}/\log x'_\nu} = \frac{\Delta_3(x'_\nu)}{\sqrt{x'_\nu}} - 1 + o(1) < -\left(\frac{1}{2} \log \frac{A}{\log^2 A} - C_{10}\right), \\
&\frac{\Delta_1(x''_\nu)}{\sqrt{x''_\nu}/\log x''_\nu} = \frac{\Delta_3(x''_\nu)}{\sqrt{x''_\nu}} - 1 + o(1) > \frac{1}{2} \log \frac{A}{\log^2 A} - C_{10},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

was mit einer gewissen Konstante C_{11}, für ein beliebiges

$$A \geqslant C_{11}, \ \Delta_1(x'_\nu) < 0 \text{ bzw. } \Delta_1(x''_\nu) > 0$$

beweist.

Jetzt müssen wir noch die Anzahl der Intervalle abschätzen, für welche

$$I_\nu \subset [\log U, \tfrac{1}{5} U]$$

ist. Die untere Grenze ist — was wir bereits ausgenützt haben — wegen $M_1 \geqslant \log U + 1$ für alle I_ν richtig. Wir müssen eine Zahl H angeben, für welche $M_H \leqslant \frac{1}{5} U - \frac{1}{3}$ ist; dann erhalten wir die Ungleichung

$$V_1(Y) \geqslant V_1(\log^{\frac{1}{5}} Y) \geqslant H .$$

Wir haben aber

$$M_H = \sum_{\nu=1}^{H} M_\nu \leqslant (2\log^2 A)^{N(A)} \bigl(\log U + H \cdot (H^2)^{N(A)}\bigr) . \tag{2.10}$$

Wenn wir jetzt A, für welches bisher $A \geqslant C_{11}$ die einzige Bedingung war, als $A = C_{11}$ festlegen, ergibt sich, daß die Ungleichung $M_H \leqslant \frac{1}{5} U - \frac{1}{3}$ sicher gilt, falls wir

$$H = C(A)\, U^{1/(2N(A)+1)} = C_2 (\log_2 Y)^{C_3} \tag{2.11}$$

wählen, womit unser Satz 1 bewiesen ist.

3. Um Satz 2 zu beweisen, wählen wir jetzt A so, daß — mit den bisherigen Bezeichnungen —

$$\frac{A}{\log^2 A} = \frac{(\log U)^\mu}{(\mu \log_2 U)^4} \tag{3.1}$$

ist; dann gilt

$$A \log^2 A < (\log U)^\mu . \tag{3.2}$$

So bekommen wir wie vorher für

$$H = \exp\bigl((\log_3 Y)^{1-\mu}\bigr) = \exp\bigl((\log U)^{1-\mu}\bigr)$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned} M_H &\leqslant (2\log^2 A)^{N(A)} (\log U + H^{1+2N(A)}) < \\ &< \exp\{N(A)(\log_2 A + \log 2 + 3\log H) + \log_2 U\} < \\ &< \exp\bigl(\tfrac{1}{3}\log^2 A \cdot A (\log U)^{1-\mu} + \log_2 U\bigr) < \\ &< \exp(\tfrac{1}{3}\log U + \log_2 U) < \\ &< \tfrac{1}{5} U - \tfrac{1}{3} . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Falls Case 2 der Arbeit [2] gültig ist, so bekommen wir aus der Definition von A, mittels $\mu\log_4 Y=\mu\log_2 U=D\geqslant C_6$, auf der rechten Seite der Formel (2.9) dieser Arbeit die Abschätzung

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\log\frac{A}{\log^2 A}-C_{10}&>\tfrac{1}{2}\left(\mu\log_2 U-4\log(\mu\log_2 U)\right)=\\&=\tfrac{1}{2}\mu\log_2 U\left(1-\frac{4\log(\mu\log_2 U)+2C_{10}}{\mu\log_2 U}\right)>\\&>\tfrac{1}{2}\mu\log_2 U\left(1-\frac{6\log D}{D}\right).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Wenn wir jetzt beachten, daß für die in der Formel (2.9) dieser Arbeit auftretenden $x'_\nu, x''_\nu=x_\nu^{(i)}$ $\log x_\nu^{(i)}\leqslant\frac{1}{5}U<U$ ist, so ergeben die Formeln (3.4) und (2.9) dieser Arbeit unmittelbar Satz 2 im Case 2 von [2] (wenn also ein entsprechender Bereich ohne Nullstellen von $\zeta(s)$ existiert).

Falls Case 1 auftritt, gewährleistet die Ungleichung (6.7) wenigstens die Anzahl $\frac{1}{4}(\log Y)^{1/30}>\exp(\log_3 Y)$ von entsprechenden $x_\nu^{(i)}=x'_\nu, x''_\nu$, für welche das Vorzeichen von $\Delta_1(x_\nu^{(i)})$ — bzw. + ist, und für den absoluten Wert der Oszillation bekommt man aus den Formeln (4.2)—(4.4)

$$\begin{aligned}|\Delta_1(x_\nu^{(i)})|&\geqslant\tfrac{1}{2}Z^{\beta^*}\exp(-\sqrt{\log Z})\geqslant\\&\geqslant\tfrac{1}{2}\sqrt{Z}\exp\left(\frac{2(\log_2 Z)^5\log Z}{\sqrt[4]{\log Z}}-\sqrt{\log Z}\right)\geqslant\\&\geqslant\sqrt{Z\exp\{\log^{3/4}Z(\log_2 Z)^4\}}\geqslant\\&\geqslant\sqrt{x_\nu^{(i)}},\end{aligned}\tag{3.5}$$

womit wir die Beweisführung von Satz 2 beendet haben.

4. Wir bemerken ferner, daß Lemma VI in [2], welches in der Form von INGHAM [1] bewiesen wurde, in einer etwas anderen Form ganz einfach zu beweisen ist. Es gilt nämlich, mit den bisherigen Bezeichnungen, für $\alpha_1=\pi/A$ die Ungleichung

$$2\sum_{0<\gamma<A}\left(1-\frac{\gamma}{A}\right)\frac{\sin\gamma\alpha_1}{\gamma}>\frac{1}{2\pi}(\log A-C_{12}).\tag{4.1}$$

Zum Beweis müssen wir die Relationen

$$\sin x \geqslant (2/\pi)\,x, \text{ für } 0 < x \leqslant \pi/2; \quad \sin x \geqslant 0, \text{ für } \pi/2 < x \leqslant \pi$$

beachten. Daraus erhält man

$$2 \sum_{0<\gamma\leqslant A} \left(1-\frac{\gamma}{A}\right) \frac{\sin(\gamma(\pi/A))}{\gamma} > 2 \sum_{0<\gamma\leqslant A/2} \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2/\pi)\,\gamma\,(\pi/A)}{\gamma} = \frac{N(A/2)}{A/2}, \tag{4.2}$$

was (4.1) ergibt, falls wir $N(T) \geqslant (1/2\pi)(\log T - C_{12})$ ausnützen.

Wenn wir statt Lemma VI in [2] die von uns bewiesene Ungleichung (4.1) anwenden, bekommen wir unseren Satz 1 mit einem $1/\pi$-mal kleineren Wert von C_2 und Satz 2, d. h. (1.4) dieser Arbeit mit dem Wert $1/2\pi$ statt $\frac{1}{2}$.

5. Was den interessanteren Wert von C_3 in Satz 1 betrifft, kann man mit unwesentlichen Modifizierungen der Beweisführung leicht zeigen, daß Satz 1 mit $C_3 = 1/(N(A)+1)$ gilt, wenn es eine Zahl A und dazu ein α gibt, für welche

$$2 \sum_{0<\gamma\leqslant A} \left(1-\frac{\gamma}{A}\right) \frac{\sin \gamma\alpha}{\gamma} > 1 + \sum_{0<\gamma<\infty} \frac{1}{\gamma^2}. \tag{5.1}$$

Skewes [4], S. 50, 59, berechnete mit Rechenmaschinen, daß (5.1) für $A = 500$ und für ein entsprechendes α gilt. (Die linke Seite ist nämlich wenigstens 1,0262, die rechte Seite aber höchstens 1,0233.) Daraus erhält man den Wert $C_3 = \frac{1}{270}$, wenn man $N(500) = 269$ berücksichtigt. Übrigens kann man mit der Wahl $\alpha = \pi/A$ ohne genaue Rechnung, mittels der im vorigen Paragraphen dargestellten Methode, leicht einen richtigen, jedoch etwas kleineren Wert für C_3 — etwa $C_3 \approx 2 \cdot 10^{-4}$ — angeben, falls man nur die Funktion $N(T)$ genügend gut kennt. Dazu sind die Formeln für $N(T)$ mit explizit angegebenen Restgliedern verwendbar; oder man nützt den Umstand aus, daß für den uns interessierenden Bereich — etwa $T \leqslant 3000$ — der genaue Wert von $N(T)$ bekannt ist.

6. Endlich möchte ich meinen besonderen Dank Herrn Professor Paul Turán aussprechen, der mir das Manuskript seiner Arbeit [2] zur Verfügung stellte und mich zur Untersuchung dieser Probleme ermutigt hat.

Anhang (8.3.1975): Nach der Einsendung dieser Arbeit habe ich die Ungleichung $V_1(Y) > C_2 \log_2 Y$ bewiesen. Eine entsprechende Verbesserung von Satz 2 ist auch möglich. Auf diese Fragen werde ich in einer anderen Arbeit zurückkommen.

Literatur

[1] Ingham, A. E.: A note on the distribution of primes. Acta Arith. **1**, 201—211 (1936).

[2] Knapowski, S., and P. Turán: On the sign changes of $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$, II. Mh. Math. **82**, 163—175 (1976).

[3] Littlewood, J. E.: Sur la distribution des nombres premiers. Comptes Rendus Paris **158**, 1869—1872 (1914).

[4] Skewes, S.: On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$. Proc. Lond. Math. Soc. **5**, 48—70 (1955).

Dr. J. Pintz
Eötvös Lorand Universität
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Muzeum krt. 6—8
H-1088 Budapest, Ungarn