EINE BEMERKUNG ZUR "COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY I—VIII" VON S. KNAPOWSKI UND P. TURÁN

Von

I. KÁTAI

Lehrstuhl für Algebra der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 13. März 1964.)

1. S. Knapowski und P. Turán haben sich in einer gemeinsamen Arbeit mit dem Vorzeichenwechsel der Funktion $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ beschäftigt. Angenommen, daß die Haselgrovesche Bedingung erfüllt ist, könnten Sie die Stelle des Vorzeichenwechsels lokalisieren. Ich werde mich in dieser Arbeit mit ähnlichen Fragen – im Falle der Entfüllung der Riemannschen Vermutung – beschäftigen.

In dieser Abhandlung sei

$$p \text{ eine Primzahl,}$$

$$(1,1) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{wenn } n = p^t \text{ eine Primzahlpotenz von } p \text{ ist,} \\ 0 & \text{andererseits,} \end{cases}$$

$$(1,2) \qquad \psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n), \quad \pi(x) = \sum_{p \le x} 1.$$

Es sei $k \ge 1$ ganz, $1 \le l \le k$ und l zu k teilerfremd, ferner

$$(1,3) \qquad \psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv l(k)}} \Lambda(n),$$

$$(1,4) \qquad \vartheta(x, k, l) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv l(k)}} \log p$$

$$(1,5) \qquad \pi(x, k, l) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv l(k)}} 1$$

$$(1,6) \qquad \psi_0(x, k, l) = \frac{\psi(x+0, k, l) + \psi(x-0, k, l)}{2}.$$

Es sei bezeichnet mit $N_k(l)$ die Anzahl der inkongruenten Lösungen von $y^2 \equiv l \pmod k$. Sei χ ein Charakter mod k und $L(s, \chi)$ die zugehörige L Funktion.

DEFINITION. Wir sagen, daß die Funktion $L(s, \chi)$ die Haselgrovesche Bedingung erfüllt, wenn in der Strecke $0 < s < 1$ $L(s, \chi) \neq 0$ ist. In ihren Abhandlungen haben S. KNAPOWSKI und P. TURÁN [1] eine Methode für Untersuchungen des Vorzeichenwechsels $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ ausgearbeitet. Sie bewiesen dort den folgenden Satz:

Ist die Haselgrovische Bedingung für alle Funktionen $L(s, \chi)$ $\chi \pmod k$ gültig, so wechselt die Funktion $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ mindestens einmal das Vorzeichen in allen Intervallen

$$\omega \leq x \leq e^{2\sqrt{\omega}} \qquad [\omega > \omega_0(k)].$$

BEMERKUNG. Wenn die Haselgrovesche Bedingung für alle Funktionen $L(s, \chi)$, $\chi \pmod k$ richtig ist, dann existiert ein $A(k) > 0$ so, daß im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $|t| \leq A(k)$ $(s = \sigma + it)$ für alle $\chi \pmod k$ $L(s, \chi) \neq 0$ ist. Wenn man $A(k)$ kennt, dann kann man eine Abschätzung für ω_0 geben. Ferner ist dort noch Folgendes bewiesen:

Angenommen, daß $l_1 \not\equiv l_2 \pmod k$ und $N_k(l_1) = N_k(l_2)$ ist, ferner, daß im Gebiet $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leq 2c_1k^{10}$ $(s = \sigma + it)$, und in der Strecke $\sigma = \frac{1}{2}$, $|t| \leq A(k)$ $(A(k) > 0)$ die Funktionen $L(s, \chi)$ $(\chi \neq \chi_0)$ nicht verschwinden, sind für alle $T > T_0(k)$ ($T_0(k)$ ist eine explizite numerische Konstante) die Abschätzungen

$$\max_{T^{1/3} \leq x \leq T} \{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)\} > \sqrt{T} \cdot \exp\left(-44 \cdot \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T}\right)$$

$$\min_{T^{1/3} \leq x \leq T} \{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)\} < -\sqrt{T} \cdot \exp\left(-44 \cdot \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T}\right)$$

richtig.

Im Fall $l_1 = 1$ haben die Verfasser einen stärkeren Satz bewiesen. Sie bewiesen in [1'] nicht nur die Existenz des Vorzeichenwechsels, sondern sie lokalisieren diesen auch.

Nun werden wir zeigen, daß

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} > 0$$

und

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} < 0$$

ist, wenn die Haselgrovesche Bedingung richtig ist. Wir beweisen ferner, daß

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} > 0$$

und

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)}{\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}} < 0$$

ist, wenn die Anzahl der inkongruenten Lösungen von $y^2 \equiv l_1 (\mathrm{mod}\ k)$, $y^2 \equiv l_2$ $(\mathrm{mod}\ k)$ übereinstimmt. Die Grundlage unseres Beweises ist ein von LITTLEWOOD stammende Gedanke, mit Hilfe dessen er bewies, daß

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)-x}{\sqrt{x}} > 0$$

und

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)-x}{\sqrt{x}} < 0$$

ist [2].

2. SATZ 1. *Wenn die Haselgrovesche Bedingung für alle Funktionen* $L(s,\chi)$, χ $(\mathrm{mod}\ k)$ *erfüllt ist, dann bestehen die Formeln*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}} > 0 \tag{2,1}$$

und

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}} < 0. \tag{2,2}$$

SATZ 2. *Wenn die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind und* $N_k(l_1)=N_k(l_2)$, *so ist*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)}{\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}} > 0 \tag{2,3}$$

und

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)}{\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}} < 0. \tag{2,4}$$

Untersuchen wir nun die Funktion

$$f(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar\chi(l_1)-\bar\chi(l_2)] \frac{L'}{L}(s,\chi).$$

Bezeichne ϱ die Nullstellen der L Funktionen und $m_\varrho(\chi)$ ihre Vielfachkeit (natürlich ist $m_\varrho(\chi)=0$, wenn $L(\varrho,\chi)\neq 0$ ist). Es ist nicht unmöglich, daß irgendein ϱ eine gemeinsame Nullstelle mehreren L Funktionen mod k ist, und so hat die Funktion $f(s)$ an dieser Stelle eventuell keinen Pol. Wenn ein Pol im Streifen $0 < \operatorname{Re}\varrho < 1$ existiert, so folgt daraus, daß

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) = \Omega\pm(1).$$

Eine solche ϱ Stelle existiert! Dieses kann man trivialerweise von der expliziter Formel $\psi_0(x, k, l)$ beweisen. (Den Beweis s. z. B.: [1] V. Abhandlung, Lemma VI, S. 52.) Von der Funktionalgleichung $L(s, \chi)$ folgt, daß $f(s)$ einen Pol in der Halbebene $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ hat. Ferner, wenn die Haselgrovesche Bedingung gültig ist, so sind diese Singularitäten nicht reelle.

Sei $\Theta = \operatorname{supr}_{\varrho} \operatorname{Re}\varrho$, wo ϱ die Polen durchläuft, und sei ferner $\varepsilon > 0$ eine beliebige feste Konstante. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) \pm x^{\Theta-\varepsilon}}{x} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s} f(s) \pm \frac{1}{s-\Theta+\varepsilon},$$

und mittels des Satzes von E. LANDAU [3]* finden wir die Formel

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) = \Omega\pm(x^{\Theta-\varepsilon}).$$

Daraus folgt der Satz 1 im Fall $\Theta > \frac{1}{2}$.

Im Fall $\Theta = \frac{1}{2}$ können wir einen genaueren Satz beweisen.

SATZ 3. *Angenommen, daß die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ und in $s = \frac{1}{2}$ regulär ist, kann man solche positive Konstanten $\omega_0 = \omega_0(k)$, $a = a(k)$, $c = c(k)$ finden, daß für alle $\omega > \omega_0$*

$$\max_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \geqq c, \tag{2,5}$$

$$\min_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \leqq -c \tag{2,6}$$

ist.

Von Satz 3 folgt der noch nicht bewiesener Teil des Satzes 1. Die folgende Formel ist gut bekannt:

* Der Satz von LANDAU ist der folgende: Sei a die Konvergenzabszisse von $F(s) = \int_1^\infty \frac{b(x)}{x^s} dx$ und $b(x) \geq 0$, wenn $x \geq x_0$. Dann ist $s = a$ eine singuläre Stelle von $F(s)$.

$$\psi_0(x,k,l_1)-\psi_0(x,k,l_2)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_\chi[\bar\chi(l_2)-\bar\chi(l_1)]\sum_{\varrho=\varrho_\chi}\frac{x^\varrho}{\varrho}+R(x,k,l_1,l_2),$$

wo

$$R(x,k,l_1,l_2)=O(\log x)$$

eine stätige Funktion von x ist. Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\Delta_0(x)=\psi_0(x,k,l_1)-\psi_0(x,k,l_2)-R(x,k,l_1,l_2),$$

$$\Delta_n(x)=\int_2^x\Delta_{n-1}(u)du\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Zum Beweis der Formel (2, 5) ist genügend beweisen, daß

$$\max_{\omega\leq x\leq a\omega}\frac{\Delta_0(x)}{\sqrt{x}}\geqq c_1,$$

wo $c_1>0$ geeignete Konstante ist. Wir bekommen den Beweis der Formel (2, 6) trivialerweise von (2, 5), wenn wir l_1 und l_2 umtauschen. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß $|\Delta_1(x)|\leq d_1\cdot x^{1/2}$ ist, wenn $x\geqq 2$. Daraus folgt für $n\geqq 1$ die Abschätzung $|\Delta_n(x)|\leqq\frac{d_1}{n!}x^{n+\frac{1}{2}}$. Andererseits, mittels n-fachen Integrationen von $\Delta_0(x)$ bekommt man

$$\Delta_n(x)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_\chi[\bar\chi(l_2)-\bar\chi(l_1)]\sum_{\varrho=\chi_\varrho}\frac{x^{\varrho+n}}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+n)}+O(x^n\log x).$$

Sei $\varrho=\frac{1}{2}+i\gamma_\varrho$, wo ϱ ein Pol von $f(s)$ im kritischen Streifen ist $(0<\operatorname{Re}\varrho<1)$, und seien ferner

$$b_\varrho=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_\chi[\bar\chi(l_2)-\bar\chi(l_1)]m_\varrho(\chi)\qquad(b_\varrho\neq O),$$

$$\gamma_0=\min_{\gamma>0}\gamma\qquad\text{und}\qquad\varrho_0=\frac{1}{2}+i\gamma_0,$$

$$\varrho_0(\varrho_0+1)\ldots(\varrho_0+n)\overset{\text{def}}{=}|\varrho_0(\varrho_0+1)\ldots(\varrho_0+n)|\cdot e^{i\psi_n},$$

$$b_{\varrho_0}=r_0\cdot e^{i\varphi_0}.$$

Von der Funktionalgleichung folgt, daß $b_{\bar\varrho}=\bar b_\varrho$. So ist

$$\Delta_n(x)=2\cdot x^{n+\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{Re}\frac{r_0\cdot e^{i\{\gamma_0\log x+\varphi_0-\psi_n\}}}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\ldots(\varrho_0+n)|}\left(1+\Theta\sum_{|\varrho|>|\varrho_0|}|b_\varrho|\frac{|\varrho_0(\varrho_0+1)\ldots(\varrho_0+n)|}{|\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+n)|}\right)+$$
$$+B(x)\cdot x^n\log x$$

wo $|\Theta| \leq 1$ und $|B(x)| < B$ ist (B ist eine absolute Konstante).

Die Reihe

$$\sum |b_\varrho| \left| \frac{\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+n)} \right|$$

konvergiert, und für alle $|\varrho| > |\varrho_0|$

$$|b_\varrho| \left| \frac{\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+n)} \right| \to 0,$$

(wenn $n \to \infty$). So für ein n_0 gilt:

$$\sum_{|\varrho| > |\varrho_0|} |b_\varrho| \left| \frac{\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+n)} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ferner ist die Ungleichung

$$|B(x) \cdot x^{n_0} \log x| < \frac{x^{n_0+\frac{1}{2}} \cdot r_0}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n_0)|}$$

erfüllt, wenn x hinreichend groß ($x \geq x_0$) ist. Sei $x \geq x_0$. Daraus folgt, daß

$$\Delta_{n_0}(x) = \frac{2 \cdot x^{n_0+\frac{1}{2}} \cdot r_0}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)|} \left\{ \cos(\gamma_0 \log x + \varphi_0 - \psi_n) + \Theta_1 \cdot \frac{1}{2} \right\} \left\{ 1 + \Theta_2 \cdot \frac{1}{2} \right\},$$

wo $|\Theta_1| \leq 1$, $|\Theta_2| \leq 1$.

Für alle $\Omega \left(x_0 < e^{\frac{\Omega}{\gamma_0}} \right)$, in den Intervallen $\left(e^{\frac{\Omega}{\gamma_0}}, e^{\frac{2\pi}{\gamma_0}+\frac{\Omega}{\gamma_0}} \right)$ existiert eine Stelle x_1, für welche $\cos(\gamma_0 \log x_1 + \varphi_0 - \psi_n) = 1$ ist.

Hieraus folgt die Abschätzung

$$\max_{e^{\frac{\Omega}{\gamma_0}} \leq x \leq e^{\frac{2\pi+\Omega}{\gamma_0}}} \frac{\Delta_{n_0}(x)}{x^{n_0+\frac{1}{2}}} > \frac{1}{2} \frac{r_0}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n_0)|} \overset{\text{def}}{=} a_1 \quad [= a_1(n_0)].$$

Es sei nun $0 < \alpha < 1$ eine beliebige feste Zahl und $n \geq 1$ eine ganze Zahl, dann

$$\frac{\Delta_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} \int_{\alpha x}^{x} \Delta_{n-1}(u)\,du + \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} \int_{2}^{\alpha x} \Delta_{n-1}(u)\,du,$$

wohin folgt

$$\frac{\Delta_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \max_{\alpha x \leq u \leq x} \frac{\Delta_{n-1}(u)}{u^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} \Delta_n(\alpha x).$$

Ferner, bei $\omega > 1$ ist

$$\max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cdot \max_{\alpha\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_{n-1}(u)}{u^{n-\frac{1}{2}}} + \max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_n(\alpha x)}{x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Mittels der Abschätzung $|\Delta_n(\alpha x)| \leqq c_1 \cdot (\alpha x)^{n+\frac{1}{2}}$ finden wir die

$$\max_{\alpha^{n_0}\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_{n-1}(x)}{x^{n-\frac{1}{2}}} \geqq \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} - c_1\alpha^{n+\frac{1}{2}}\right\}$$

Ungleichung.
Daraus folgt durch Iteration

$$\max_{\alpha^{n_0}\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_0(x)}{x^{\frac{1}{2}}} \geqq \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdots \left(n_0+\frac{1}{2}\right) \max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} - c_1 \cdot (n_0+2)!\,\alpha^{1/2}.$$

Wenn wir α, d, n, ω so wählen, daß

$$c_1 \cdot (n_0+2)!\,\alpha^{1/2} \leqq \frac{a_1}{4}, \quad d \geqq e^{\frac{2\pi}{\gamma_0}}, \quad \omega > \omega_0,$$

dann ist

$$\max_{\alpha^{n_0}\omega \leq x \leq d\omega} \frac{\Delta_0(x)}{x^{1/2}} \geq n_0!\,a_1,$$

und so bekommen wir den Satz 3.

3. SATZ 4. *Wenn neben den Voraussetzungen von* Satz 3 *auch noch* $N_k(l_1) = N_k(l_2)$ *ist, dann*

$$\max_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} \geq c,$$

$$\min_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} \leq -c.$$

Jetzt beweisen wir die Sätze 2 und 4.
Wenn wir

$$K(v) \overset{\text{def}}{=} \int_2^v \{\psi(t,k,l_1)-\psi(t,k,l_2)\}du$$

schreiben, dann ist

$$K(\nu) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)] \sum_{\varrho=\varrho_\chi} \frac{\nu^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)} + c_2 \nu \log \nu + O(\nu).$$

Nach den Voraussetzungen von Sätzen 2 und 4 gilt:

$$\vartheta(x,k,l_1) - \vartheta(x,k,l_2) = \psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2) - \sum_{\mu^2 \equiv l_1(k)} \psi(\sqrt{x},k,\mu) +$$

$$+ \sum_{\nu^2 \equiv l_2(k)} \psi(\sqrt{x},k,\nu) + O(x^{1/3}) = \psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right).$$

Andererseits ist

$$\pi(x,k,l_1) - \pi(x,k,l_2) = \int_2^x \frac{1}{\log u} d\{\vartheta(x,k,l_1) - \vartheta(x,k,l_2)\} =$$

$$= \frac{\vartheta(x,k,l_1) - \vartheta(x,k,l_2)}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right) + \int_2^x \frac{1}{u \log^2 u} dK(u) =$$

$$= \frac{\vartheta(x,k,l_1) - \vartheta(x,k,l_2)}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right)$$

nach

$$\int_2^x \frac{dK(u)}{u \log^2 u} = \frac{K(x)}{x \cdot \log^2 x} + O(1) + \int_2^x \frac{K(u) \cdot (\log^2 u + 2 \log u)}{u^2 \log^4 u} du = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right).$$

Daraus folgt nun die folgende Formel:

$$\pi(x,k,l_1) - \pi(x,k,l_2) = \frac{\psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2)}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right),$$

wohin die Sätze 2 und 4 sofort folgen.

Literatur

[1] S. Knapowski and P. Turán, Comparative prime-number theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, I–III, **13** (1962), 299–364; IV–VI, **14** (1963), 31–78; VII–VIII, **14** (1963), 241–268.

[2] J. E. Littlewood, Mathematical notes, 3; On a theorem concerning the distribution of prime numbers, *Journal of the London Math. Soc.*, **2** (1927), 41–45.

[3] E. Landau, Über einen Satz von Tschebyscheff, *Math. Ann.*, **61** (1905), 527–550.