Ueber das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz

Polya, G.

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse

Volume 1930 / 1930 / Article

I.
Mathematik

Über das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz.

Von

G. Pólya in Zürich.

Vorgelegt von E. LANDAU in der Sitzung am 24. Januar 1930.

1. Ich setze, wie üblich,

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqq x} \log p$$

(p Primzahl, m ganz, $m \geqq 1$) und bezeichne mit $W(n)$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der n-gliedrigen Folge

$$\psi(1) - 1,\ \psi(2) - 2,\ \ldots\ \psi(n) - n.$$

Offenbar ist $0 \leqq W(n) \leqq n-1$ und $W(n)$ nicht abnehmend. Es ist bekannt [1]), daß

$$\lim_{n \to \infty} W(n) = \infty. \tag{1}$$

Mein Zweck ist dies zu

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{W(n)}{\log n} \geqq \frac{\gamma}{\pi} > 0 \tag{2}$$

zu verschärfen. Die positive Größe γ hängt mit der (z. Z. noch unbekannten) Konfiguration der Nullstellen der ζ-Funktion in der oberen Halbebene zusammen, u. zw. folgendermaßen: Man bezeichne diese Nullstellen mit $\beta_n + i\gamma_n$ (so daß $0 < \beta_n < 1$, $\gamma_n > 0$) und die obere Grenze der Abscissen β_n mit Θ. (Es ist bekannt, daß $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$.) Ist Θ ein Maximum, d. h. gibt es Nullstellen von der Form $\Theta + i\gamma_m$, so sei γ das Minimum dieser γ_m. (Dieser Fall würde also insbesondere dann eintreten, wenn $\Theta = \frac{1}{2}$, d. h. die Riemannsche Vermutung wahr wäre.) Ist Θ kein Maximum, d. h. sind alle $\beta_n < \Theta$, so sei $\gamma = \infty$. (Dieser Fall würde also insbesondere dann eintreten, wenn $\Theta = 1$ wäre.)

1) Vgl. E. PHRAGMÉN, Öfversigt af K. Vetensk. Förhandlingar (Stockholm), **48** (1891—92), 599—616 und **58** (1901—02), 189—202, ferner E. SCHMIDT, Math. Annalen, **57** (1903), 195—204.

Den eigentlichen Grund der Tatsache (1) hat Landau aufgedeckt, indem er (1) als unmittelbare Folgerung eines allgemeinen funktionentheoretischen Satzes herleitete[2]. Ähnlicherweise werde ich zeigen, daß (2) unmittelbar aus einem allgemeinen funktionentheoretischen Satz folgt, zu dessen Formulierung ich nun übergehe.

2. Ich benutze folgende Bezeichnungen:

$\omega(u)$ ist eine reellwertige Funktion der reellen Variablen u, definiert für $u \geqq 1$ und eigentlich integrabel in jedem endlichen Intervall mit linkem Endpunkt 1.

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ sind die Zeichenwechselstellen von $\omega(u)$. Genauer gesagt, führe ich eine neue Voraussetzung über $\omega(u)$ ein: Es sei $\omega(u)$ entweder von konstantem Vorzeichen für $u > 1$, oder es seien Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ vorhanden, die keinen Häufungspunkt im Endlichen haben (ihre Anzahl kann endlich oder unendlich sein) und so beschaffen sind, daß

$$1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots,$$

$$(-1)^n \omega(u) \geqq 0 \quad \text{für} \quad u_{n-1} < u < u_n \tag{3}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$) und daß $\omega(u)$ in keinem der Intervalle $u_{n-1} < u < u_n$ identisch verschwindet.

$W(x)$ ist die Anzahl der Zeichenwechselstellen von $\omega(u)$ bis zur Grenze x. D. h. $W(x) = n$ für $u_n \leqq x < u_{n+1}$. ($W(x)$ verschwindet identisch, wenn $\omega(u)$ konstantes Vorzeichen bewahrt.)

Den hier in Betracht kommenden Teil des vorher angedeuteten Satzes von Landau will ich nun so formulieren:

I. *Es sei*

$$\int_1^\infty \omega(u) u^{-s}\, du = \Phi(s) \tag{4}$$

konvergent in einer gewissen Halbebene, die von einer Parallelen zur imaginären Achse von links begrenzt ist. Es sei die dargestellte Funktion $\Phi(s)$ ausnahmslos regulär in der Halbebene $\Re s > \Theta$ jedoch in keiner Halbebene $\Re s > \Theta - \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ ist. Wenn Θ kein singulärer Punkt für $\Phi(s)$ ist, dann ist $\lim\limits_{x \to \infty} W(x) = \infty$, d. h. $\omega(u)$ hat unendlich viele Zeichenwechsel.

Hierzu will ich folgenden neuen Satz hinzufügen, der mehr über $\Phi(s)$ voraussetzt und mehr über $W(x)$ aussagt:

II. *Es sei das Integral* (4) *konvergent in einer Halbebene, begrenzt von links durch eine Parallele zur imaginären Achse. Es sei*

---

2) Math. Annalen, **61** (1905), 527—550, und Sitzungsberichte der Akademie München, **36** (1906), 151—218.

$\Phi(s)$ ausnahmslos regulär in der Halbebene $\Re s > \Theta$, jedoch in keiner Halbebene $\Re s > \Theta - \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ ist, hingegen meromorph in der Halbebene $\Re s \geqq \Theta - b$, wo $b > 0$.

Wenn $\Phi(s)$ Pole auf der Geraden $\Re s = \Theta$ besitzt, so sei $s = \Theta + i\gamma$ derjenige darauf und in der Halbebene $\Im s \geqq 0$ gelegene Pol, der den kleinsten Imaginärteil γ hat. ($\Theta + i\gamma$ existiert, da $\omega(u)$ reellwertig. Es ist $\gamma \geqq 0$). *In diesem Falle ist*

$$\text{(5a)} \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{W(x)}{\log x} \geqq \frac{\gamma}{\pi}.$$

Wenn $\Phi(s)$ auf der Geraden $\Re s = \Theta$ keinen Pol besitzt, so gilt

$$\text{(5b)} \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{W(x)}{\log x} = \infty.$$

Für die Funktion

$$\text{(6)} \qquad -\frac{\zeta'(s)}{s\,\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty (\psi(u) - u)\, u^{-1-s}\, du$$

ist die in den Sätzen I, II erwähnte Zahl Θ zwar nicht genau bekannt, aber auf alle Fälle ist $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$, ferner ist Θ kein singulärer Punkt, und es kann $\Theta - b = 0$ gewählt werden (etwa). So folgt (1) aus dem LANDAUschen Satz I und (2) aus dem neuen Satz II.

Satz II hat eine gewisse Verwandtschaft mit bekannten Sätzen von FABRY über die Singularitäten von Potenzreihen und wird mit Methoden bewiesen, die zum Nachweis der FABRYschen Sätze herausgebildet worden sind. Der wesentliche Punkt ist dabei, meiner Ansicht nach, die Verwendung einer linearen Funktionaloperation, vgl. (15). Ich muß beim Beweis auf meine diesbezüglichen Untersuchungen[3]) zurückgreifen, in deren Kenntnis man mühelos zum Satz II gelangt.

3. Indem ich Satz I als bekannt voraussetze, muß ich mich nur mit dem Fall befassen, in welchem unendlich viele Zeichenwechselstellen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ vorliegen. Ich setze (vorderhand!) voraus, daß

$$\text{(7)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\log u_n} = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{W(x)}{\log x} = d$$

endlich ist. Dann ist, bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für genügend großes n,

$$\text{(8)} \qquad \frac{1}{(\log u_n)^2} < \frac{(d+\varepsilon)^2}{n^2},$$

3) Math. Zeitschr., 29 (1929), 549—640. Es kommt nur Kapitel II, S. 571—610, in Betracht, u. zw. insbesondere die Nummern 20—25 und 36—40.

also das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(\log u_n)^2}\right) = F(z) \tag{9}$$

konvergent. Der Vergleich von (9) mit dem Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(d+\varepsilon)^2|z|^2}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi(d+\varepsilon)|z|}-e^{-\pi(d+\varepsilon)|z|}}{2\pi(d+\varepsilon)|z|}$$

ergibt wegen (8), daß für genügend großes $|z|$

$$|F(z)| < e^{\pi(d+\varepsilon)|z|}. \tag{10}$$

Ich setze

$$F(z) = a_0+\frac{a_2 z^2}{2!}+\frac{a_4 z^4}{4!}+\cdots, \tag{11}$$

$$f(z) = \frac{a_0}{z}+\frac{a_2}{z^3}+\frac{a_4}{z^5}+\cdots. \tag{12}$$

Es folgt aus (10), daß die Reihe (12) außerhalb der Kreisfläche

$$|z| \leqq \pi d \tag{13}$$

konvergiert[4]), ferner daß es einen konvexen, in der abgeschlossenen Kreisfläche (13) enthaltenen Bereich $\mathfrak{J}$ gibt, so beschaffen, daß *$f(z)$ außerhalb von $\mathfrak{J}$ regulär ist jedoch in jedem extremen Punkt von $\mathfrak{J}$ singulär wird*[5]). Es ist übrigens, da die Koeffizienten $a_0, a_2, a_4, \ldots$ reell sind, und $f(z)$ eine ungerade Funktion ist, $\mathfrak{J}$ symmetrisch sowohl inbezug auf die reelle wie auf die imaginäre Achse und enthält den Nullpunkt. Man betrachte diejenige Stützgerade von $\mathfrak{J}$, deren äußere Normale die positive reelle Achse ist. Auf dieser Stützgeraden liegt entweder ein extremer Punkt von $\mathfrak{J}$ — dieser werde j genannt — oder es liegen darauf zwei extreme Punkte von $\mathfrak{J}$ — dann werde derjenige unterhalb der reellen Achse j genannt. Wird $j = \varkappa + i\lambda$ gesetzt ($\varkappa$, λ reell), so ist

$$0 \leqq \varkappa \leqq \pi d, \quad -\pi d \leqq \lambda \leqq 0. \tag{14}$$

Wird unter $\Psi(s)$ irgend eine analytische Funktion verstanden, die in der Halbebene $\Re s > \Theta$ regulär ist, so sei

$$\Psi^*(s) = \frac{1}{2\pi i}\int \Psi(s-w) f(w)\, dw \tag{15}$$

---

4) A. a. O. [3]), S. 578, Satz I.

5) A. a. O. [3]), S. 585, Satz III, von dessen Beweis die Überlegung S. 583, unter 23a) zumeist in Betracht kommt. $\mathfrak{J}$ ist jetzt, da die a_n reell sind, zugleich „Indikatordiagramm“ und konjugiertes „Diagramm“, $\mathfrak{J} = \bar{\mathfrak{J}}$.

gesetzt. Die Integration in (15) ist in positivem Sinne entlang einer doppelpunktlosen geschlossenen Kurve erstreckt, die den Bereich $\mathfrak{J}$, also sämtliche Singularitäten von $f(w)$ umfaßt und sämtliche Singularitäten von $\Psi(s-w)$ außerhalb läßt; die Integrationskurve läßt sich also ohne Änderung des Wertes beliebig um $\mathfrak{J}$ zusammenschnüren, und hieraus geht hervor, daß $\Psi^*(s)$ durch (15) in der Halbebene

$$\Re s > \Theta + \varkappa \tag{16}$$

erklärt und regulär ist[6]).

Wird

$$\int_1^g \omega(u)\, u^{-s}\, du = \Phi_g(u)$$

gesetzt, so ist, gemäß der Definition (15),

$$\begin{aligned}\Phi_g^*(s) &= \frac{1}{2\pi i}\int f(w) \int_1^g \omega(u)\, u^{-s+w}\, du\, dw\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_1^g \omega(u)\, u^{-s} \int f(w)\, e^{w \log u}\, dw\, du\\ &= \int_1^g \omega(u)\, u^{-s} F(\log u)\, du,\end{aligned}$$

indem die Reihenfolge der beiden (eigentlichen) Integrationen vertauscht wurde[7]). Aus dem Umstand, daß in jedem abgeschlossenen Bereich im Inneren der Konvergenzhalbebene (sagen wir $\Re s > \alpha$) des Integrals (4)

$$\Phi(s) = \lim_{g \to \infty} \Phi_g(s)$$

gleichmäßig gilt, kann geschlossen werden[8]), daß in einer gewissen Halbebene (nämlich für $\Re s > \alpha + \varkappa$)

$$\Phi^*(s) = \lim_{g \to \infty} \Phi_g^*(s) = \lim_{g \to \infty} \int_1^g \omega(u)\, F(\log u)\, u^{-s}\, du$$

$$\Phi^*(s) = \int_1^\infty \omega(u)\, F(\log u)\, u^{-s}\, du. \tag{17}$$

Gemäß (3) und (9) ist nun

$$\omega(u)\, F(\log u) \leqq 0 \quad \text{für} \quad u > 1, \tag{18}$$

6) Vgl. a. a. O. [3]), S. 598, Nr. 36.

7) Ferner wurde die Formel (27) a. a. O. [3]), S. 580 benützt.

8) A. a. O. S. 600, Satz VI.

und Satz I ergibt, daß $\Phi^*(s)$ entweder eine ganze Funktion ist oder einen singulären Punkt mit maximaler Abscisse auf der reellen Achse besitzt. Es fragt sich nur, wie sich dies damit verträgt, was wir sonst über die Singularitäten von $\Phi^*(s)$ wissen.

4. Nach Voraussetzung sind alle im Streifen $\Theta - b < \Re s \leqq \Theta$ gelegenen singulären Stellen von $\Phi(s)$ Pole; abgesehen von den etwaigen rellen, sind sie paarweise symmetrisch zur reellen Achse gelegen und haben keinen Häufungspunkt im Endlichen. Bezeichnen wir diese Pole mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$. (Die c_n seien nach wachsendem Absolutwert der Ordinaten geordnet, diejenigen mit gleichem Absolutwert der Ordinate nach wachsenden Abscissen, und von zwei spiegelbildlich zur reellen Achse gelegenen gehe der Pol mit positivem Imaginärteil voraus.) Der Hauptteil von $\Phi(s)$ in dem Pol $c_m = c$ sei

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k k!\, b_k}{(s-c)^{k+1}} = X_m(s) = X(s), \tag{19}$$

wobei $b_l \neq 0$, sodaß c ein Pol $(l+1)$-ter Ordnung $(l \geqq 0)$ und

$$\Psi(s) = \Phi(s) - X(s) \tag{20}$$

im Punkte c regulär ist. Gemäß (19) findet man [9])

$$b_0 f(s-c) + b_1 f'(s-c) + \cdots + b_l f^{(l)}(s-c) = X^*(s). \tag{21}$$

Hilfssatz [10]): *Die Funktion $X^*(s)$ ist regulär außerhalb des konvexen Bereiches $c + \mathfrak{J}$, hingegen ist jeder extreme Punkt von $c + \mathfrak{J}$, insbesondere $c + j$, ein singulärer Punkt von $X^*(s)$.*

Ich habe bloß zu zeigen, daß $f(s-c)$ und $X^*(s)$ dieselben singulären Punkte im Endlichen besitzen. Es ist klar, daß wo $f(s-c)$ regulär, dort auch $X^*(s)$ regulär ist. Faßt man (21) als eine lineare Differentialgleichung für $f(s-c)$ mit gegebener rechter Seite $X^*(s)$ auf, so zeigt entweder der Existenzsatz, oder noch besser die geläufige Formel, die $f(s-c)$ durch $X^*(s)$ und durch die Integrale der zugehörigen homogenen Gleichung (welche konstante Koeffizienten hat) ausdrückt, daß wo im Endlichen $X^*(s)$ regulär, dort auch $f(s-c)$ regulär ist.

Die Funktion (20) ist in der Halbebene $\Re s > \Theta - b$ regulär, abgesehen von Polen, die in den Punkten $c_1, c_2, \ldots c_{m-1}, c_{m+1}, \ldots$ liegen. Hieraus kann man schließen [11]): Werden aus der Halbebene

9) Vgl. a. a. O. [8]), S. 604, Beispiel d).

10) Will man bloß (2) beweisen, so kommt nur der selbstverständliche Fall $l = 0$ diese Hilfssatzes in Frage, da die Pole der Funktion (6) sämtlich einfach sind.

11) A. a. O. S. 598, Satz V.

$$\Re s > \Theta - b + \varkappa$$

die kongruenten und gleichgelegenen Bereiche

$$c_1 + \mathfrak{J},\ c_2 + \mathfrak{J},\ \ldots\ c_{m-1} + \mathfrak{J},\ c_{m+1} + \mathfrak{J},\ \ldots$$

herausgeschnitten, so ist in demjenigen übriggebliebenen Teil, der mit $+\infty$ zusammenhängt, $\Psi^*(s)$ regulär. Wir wollen hieraus auf die singulären Punkte von

$$\Phi^*(s) = \Psi^*(s) + X^*(s) \tag{22}$$

schließen. Alle drei Funktionen in (22) sind sicherlich in der Halbebene (16) regulär. Wir haben zweierlei zu untersuchen: Erstens, ob $\Phi^*(s)$ auch in dem reellen Grenzpunkt $\Theta + \varkappa$ der Halbebene (16) regulär ist (um Satz I und (18) anwenden zu können) und zweitens, ob $\Psi(s)$ im Punkte $c + j$ (der für $X^*(s)$, wie wir aus dem Hilfssatz wissen, singulär ist) regulär bleibt?

a) Im Falle $\gamma = 0$ ist die Behauptung (5a) inhaltslos. Wir haben uns bloß mit dem Fall $\gamma > 0$ zu befassen, in welchem $\Theta + i\gamma = c$ ein Pol von $\Phi(s)$ ist, und zwar von allen denjenigen Polen von $\Phi(s)$, die auf der oberen Hälfte der Geraden $\Re s = \Theta$ liegen, der der reellen Achse nächstgelegene. und wir haben zu entscheiden, ob

$$\pi d < \gamma \tag{?}$$

möglich ist. (Es ist d durch (7) definiert).

Wird (?) angenommen, so ist $\Phi^*(s)$ in $\Theta + \varkappa$ regulär. Denn der Punkt $\Theta + \varkappa$ ist von keinem Bereich $c_m + \mathfrak{J}$ mit $\Re c_m < \Theta$ überdeckt, unter der Annahme von (?) auch vom Bereich $c + \mathfrak{J}$ nicht, also umsoweniger von einem $c_n + \mathfrak{J}$, $n \neq m$ mit $\Re c_n = \Theta$, da doch diese c_n der reellen Achse nicht näher liegen als c.

Unter der Annahme (?) hat der Bereich $c + \mathfrak{J}$ mit $c + \mathfrak{J}$ keinen Punkt gemeinsam. Wenn aber der Punkt $c + j$ von $\bar{c} + \mathfrak{J}$ nicht bedeckt wird, so wird er offenbar auch von keinem anderen Bereich $c_n + \mathfrak{J}$ mit $n \neq m$ bedeckt, ist also ein regulärer Punkt für $\Psi^*(s)$. Er ist aber singulärer Punkt von $X^*(s)$, und daher, wegen (22), auch von $\Phi^*(s)$.

Zusammengefaßt ist, unter der Annahme (?), $\Phi^*(s)$ regulär in der Halbebene (16), regulär in dem reellen Grenzpunkt dieser Halbebene, aber nicht regulär auf der ganzen Grenzgeraden davon (nämlich in $c + j = \Theta + \varkappa + i(\gamma + \lambda)$ nicht). Dies ist, gemäß Satz I, mit (17), (18) unvereinbar, und es bleibt uns nichts übrig als (?) zu verneinen, also (5a) zuzugeben.

b) Im Falle, daß $\Phi(s)$ auf der Geraden $\Re s = \Theta$ regulär, also $\Re c_n < \Theta$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist, steht der Ausgangspunkt unserer ganzen Rechnung in Frage, nämlich ob

(??) $\qquad d$ endlich.

In diesem Falle hat offenbar kein Bereich $c_n + \mathfrak{J}$ Punkte mit der Geraden $\Re s = \Theta + \varkappa$ gemeinsam, und so ist insbesondere der reelle Punkt davon, $\Theta + \varkappa$ für $\Phi^*(s)$ regulär.

Andererseits ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \Re c_n = \Theta, \qquad \lim_{n\to\infty} |\Im c_n| = \infty$$

und so kann man[12]) zu einem beliebig gegebenen ε, $\varepsilon < 0$, Indices m finden, so daß

$$\Re c_m > \Re c_1,\ \Re c_m > \Re c_2,\ \ldots\ \Re c_m > \Re c_{m-1} \tag{23}$$

$$\Re c_m > \Theta - \varepsilon,$$

$$\pi d < |\Im c_m| = |\Im c_{m+1}| < |\Im c_{m+2}|. \tag{24}$$

Es sei $c_m = c$ (und folglich $c_{m+1} = \bar{c}$). Die Bereiche $c + \mathfrak{J}$ und $\bar{c} + \mathfrak{J}$ haben keinen Punkt gemeinsam, wegen (24), der Punkt $c + j$ wird von keinem $c_n + \mathfrak{J}$ mit $n \neq m$ bedeckt (nicht für $n < m$ wegen (23), und nicht für $n > m$, wegen (24)). $\Psi^*(s)$ ist somit in $c + j$ regulär, also, vgl. (22), $\Phi^*(s)$ dort singulär.

Zusammengefaßt: Es hat $\Phi^*(s)$ singuläre Punkte in beliebiger Nähe der Geraden $\Re s = \Theta + \varkappa$, keine darauf oder rechts davon. Dies ist unverträglich mit Satz I, (17) und (18); daher ist (??) zu verneinen und (5b) zu bejahen.

5. Es folgen noch einige Bemerkungen zum Satz II, die ich aber nicht ins Einzelne ausführen will.

a) In der Ungleichung (5a) kann, für geeignete Funktionen $\Phi(s)$, das Gleichheitszeichen erreicht werden. Ein einfaches Beispiel ist

$$\Gamma(s-i\gamma)\zeta(s-i\gamma) + \Gamma(s+i\gamma)\zeta(s+i\gamma) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \frac{2\cos(\gamma \log u)}{u\left(e^{\frac{1}{u}}-1\right)}\, u^{-s}\, du$$

mit $\gamma > 0$; das Integral $\int_0^1$ stellt eine ganze Funktion dar. Ebenfalls leicht sind Beispiele zu bilden, für welche das Gleichheitszeichen in (5a) nicht erreicht wird.

12) Es ist neben einer geläufigen Uberlegung (Vgl. z. B. G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze, (Springer, 1925), Bd. I, S. 18, Nr. 107) noch die eingangs dieser Nr. 4 besprochene Anordnung der c_n zu berücksichtigen.

b) Man kann aus Satz II außer (2) noch andere Beziehungen zwischen dem Verhalten von zahlentheoretischen Funktionen und der Konfiguration der Nullstellen der ζ-Funktion oder verwandter Funktionen gewinnen, indem man Satz II, ganz wie auf (6), noch auf andere ähnlich gebaute Integrale anwendet. Ein naheliegendes Beispiel ist

$$\frac{1}{s\zeta(s)} = \int_1^{\infty} M(u)\, u^{-1-s}\, du.$$

Um jedoch die Anzahl der Zeichenwechsel des Restgliedes in anderen Formen des Primzahlsatzes abzuschätzen, scheint eine unmittelbare Anwendung des Satzes II noch nicht zu genügen.

c) Auf mehr oder weniger naheliegende Erweiterungen und Analogien des Satzes II soll auf dieser Stelle nicht eingegangen werden, abgesehen von einer Ausnahme: Es sei hier der einfachste analoge Satz, nämlich der über Potenzreihen, mit Hinzufügung einer zweiten Ungleichung, ohne Beweis ausgesprochen werden:

Es soll die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

mit reellen Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *im Einheitskreise konvergieren, auf dessen Rand außer Polen keine Singularitäten besitzen, und zwar sollen* $e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}, \ldots e^{i\gamma_l}$ *alle auf der abgeschlossenen oberen Halbperipherie liegenden Pole sein,*

$$0 \leqq \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_l \leqq \pi.$$

Bezeichnet V_n *die Anzahl der Zeichenwechsel unter den* $n+1$ *ersten Koeffizienten*

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n,$$

so ist

$$\frac{\gamma_1}{\pi} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \frac{V_n}{n} \leqq \frac{\gamma_l}{\pi}.$$

Der Fall $l = 1$, also $\gamma_l = \gamma_1$ ergibt die eine Hälfte eines von J. König herrührenden Satzes[13]), der mir die Anregung zur vorliegenden Untersuchung gab.

13) J. König, Math. Annalen, 9 (1876), 530—540, auch a. a. O. [12]), S. 131, Nr. 245.