Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie.

Zweite Abhandlung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Wie ich schon im Nachtrage zu meiner ersten Abhandlung hervorgehoben habe, bewiesen die Herren Hardy und Littlewood neuerdings: *Wenn* II *wahr ist, so ist* I *wahr.* In etwas vereinfachter Darstellung[1]) lege ich hier ihren Beweis vor.

---

[1]) Meine Abkürzung beruht z. B. darauf, daß sie $\psi(z)$ in der Gestalt

$$\psi(z) = e^z + \int_0^\infty \frac{e^{-wz}\,dw}{\pi^2 + \log^2 w}$$

haben und für den Beweis von Hilfssatz 2 eine Abhandlung von Herrn W. H. Young heranziehen.

Übrigens beweisen sie nicht nur meinen Hilfssatz 5, sondern mit dem gleichen Ansatz sogar, für $\Re(y) > 0$,

$$(1)\qquad f(y) = -\sum_\varrho \Gamma(\varrho)\, y^{-\varrho} + \Phi_1(y) + y \log\frac{1}{y}\, \Phi_2(y),$$

wo $\Phi_1(y)$ und $\Phi_2(y)$ ganze Funktionen sind. Aber in dem hierfür als Paradigma angeführten Abschnitt 2.21 machen sie ein Versehen, indem sie auf S. 135 aus meinem *Handbuch*, S. 336, die Formel $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log|t|)$, gleichmäßig für $\sigma \leqq -1$, zitieren und anwenden. Weder steht diese Formel dort (vielmehr $O(\log|s|)$), noch ist sie richtig. Denn dann wäre ein festes $a > 0$ vorhanden, so daß $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ für $\sigma \leqq -1$, $t = a$ beschränkt ist; wegen

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

wäre also $\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right|$ für $\sigma \geqq 2$, $t = a$ beschränkt, also für ganzzahliges $h > 2$

Hilfssatz 1: *Es sei $z > 0$. Für das offenbar konvergente Integral*

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{\Gamma(s)}\, ds$$

gilt auf der Strecke $0 < z < \frac{1}{3}$

$$\psi(z) > \frac{c_1}{z \log^2 \frac{1}{z}}, \quad c_1 > 0.$$

Beweis: Für $0 < s < 1$ ist $\frac{1}{\Gamma(s)} > c_2 s,\ c_2 > 0$;*) für $0 < z < \frac{1}{3}$ ist also

$$\psi(z) > \int_0^{\frac{1}{\log \frac{1}{z}}} \frac{z^{s-1}}{\Gamma(s)}\, ds > \frac{c_2}{z} \int_0^{\frac{1}{\log \frac{1}{z}}} z^s s\, ds = \frac{c_2}{z \log^2 \frac{1}{z}} \int_0^1 z^{\frac{x}{\log \frac{1}{z}}} x\, dx$$

$$= \frac{c_2}{z \log^2 \frac{1}{z}} \int_0^1 e^{-x} x\, dx = \frac{c_1}{z \log^2 \frac{1}{z}}.$$

Hilfssatz 2: *Für $n > 1$ ist*

$$\frac{1}{\log n} = \int_0^\infty e^{-nz} \psi(z)\, dz.$$

Beweis:

$$\frac{1}{\log n} \overset{4}{=} \int_0^\infty \frac{ds}{n^s} \overset{5}{=} \int_0^\infty \frac{ds}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nz} z^{s-1}\, dz \overset{6}{=} \int_0^\infty e^{-nz}\, dz \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{\Gamma(s)}\, ds.$$

Hilfssatz 3: *Es sei a_n für $n \geqq 2$ reell,*

$$\varphi(y) = \sum_{n=2}^\infty a_n e^{-ny}$$

für $y > 0$ konvergent (also als Potenzreihe absolut konvergent und stetig).

$$\left| \frac{\Gamma'(h+ai)}{\Gamma(h+ai)} - \frac{\Gamma'(2+ai)}{\Gamma(2+ai)} \right| = \left| \frac{1}{2+ai} + \frac{1}{3+ai} + \cdots + \frac{1}{h-1+ai} \right|$$

beschränkt, entgegen der Divergenz der harmonischen Reihe.

Aber der Hardy-Littlewoodsche Beweis von (1) ist sofort in Ordnung zu bringen. Es ist nur im Paradigma auf S. 135, Z. 8 so weiterzurechnen:

$$\left| \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} \Gamma(s) y^{-s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds \right| = O\left\{ \frac{|y|^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)|t|} \log \sqrt{q^2 + t^2}\, dt \right\} \to 0$$

bei $m \to \infty$, $q = -m - \frac{1}{2} \to -\infty$, wegen $\log \sqrt{q^2+t^2} = \frac{1}{2} \log(q^2+t^2) < \frac{1}{2}(q^2+t^2)$

und der Konvergenz von $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)|t|}\, dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)|t|}\, t^2\, dt.$

Es werde für $y > 0$

$$\omega(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n} e^{-ny}$$

gesetzt. Es sei

$$\liminf_{y=0} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}}} > 0.$$

Dann ist

$$\liminf_{y=0} \frac{\omega(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}} : \log \frac{1}{y}} > 0.$$

Beweis: Da für $y > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} |a_n| e^{-ny} e^{-nz} \psi(z)\, dz = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\log n} e^{-ny}$$

konvergiert, ist dort

$$\omega(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-ny} e^{-nz} \psi(z)\, dz = \int_0^{\infty} \psi(z) \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-n(y+z)}\, dz = \int_0^{\infty} \psi(z)\, \varphi(z+y)\, dz.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein y_0 der Strecke $0 < y_0 < \frac{2}{3}$ und ein $\varkappa > 0$, so daß für $0 < y \leqq y_0$

$$\varphi(y) > \frac{\varkappa}{\sqrt{y}}$$

ist. Nach Hilfssatz 2 konvergiert $\int\limits_{\frac{1}{2} y_0}^{\infty} e^{-2z} \psi(z)\, dz$, also $\int\limits_{\frac{1}{2} y_0}^{\infty} \psi(z) \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-nz} dz$; für $y > 0$ ist also

$$\left| \int_{\frac{1}{2} y_0}^{\infty} \psi(z)\, \varphi(z+y)\, dz \right| \leqq \int_{\frac{1}{2} y_0}^{\infty} \psi(z) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-nz} dz,$$

wo die rechte Seite von y frei ist. Für $0 < y \leqq \frac{1}{2} y_0$ ist aber nach Hilfssatz 1

$$\int_0^{\frac{1}{2} y_0} \psi(z)\, \varphi(z+y)\, dz > \int_0^{\frac{1}{2} y_0} \frac{c_1}{z \log^2 z} \frac{\varkappa}{\sqrt{z+y}}\, dz \geqq c_1 \varkappa \int_0^{y} \frac{dz}{z \log^2 z \sqrt{z+y}}$$

$$> \frac{c_1 \varkappa}{\sqrt{2y}} \int_0^{y} \frac{dz}{z \log^2 z} = \frac{c_1 \varkappa}{\sqrt{2} \sqrt{y} \log \frac{1}{y}};$$

daher ist

$$\liminf_{y=0} \frac{\omega(y)}{\sqrt{\frac{1}{y}} : \log \frac{1}{y}} \geqq \frac{c_1 \varkappa}{\sqrt{2}} > 0.$$

Hilfssatz 4: *Es durchlaufe $\varrho = \beta + \gamma i$ die von $-1, -3, -5, \ldots$ verschiedenen Wurzeln der in § 1 meiner ersten Abhandlung genannten ganzen Funktion $L(s)$. Dann ist*

$$\frac{1}{2}\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{1-\varrho}\right)=\sum_{\gamma>0}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{1-\varrho}\right)=\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}<\frac{1}{3}.$$

Beweis: Nach S. 497 des *Handbuchs* genügt die ganze Funktion

$$(2)\qquad \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s)=\xi(s),$$

welche genau die ϱ zu Wurzeln hat, der Funktionalgleichung

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

$$(3)\qquad \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=-\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)};$$

nach S. 506 ist

$$\xi(s)=Ae^{Bs}\prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}},$$

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=B+\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{1-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)=\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}-B=\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}-\frac{\xi'(0)}{\xi(0)}=2\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}=\log\frac{4}{\pi}+\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+2\frac{L'(1)}{L(1)}$$

$$=\log\frac{4}{\pi}-C-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\log n}{n},$$

wobei C die Eulersche Konstante bedeutet, also

$$=2\log 2-\log\pi-C+\frac{8}{\pi}\left(\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}-\frac{\log 9}{9}+\ldots\right)$$

$$<2\log 2-\log\pi-C+\frac{8}{\pi}\frac{\log 3}{3}<1{,}4-1{,}14-0{,}57+\frac{8}{3{,}1}\frac{1{,}1}{3}$$

$$=-0{,}31+\frac{8{,}8}{9{,}3}<-0{,}31+0{,}95=0{,}64<\frac{2}{3}.$$

Hilfssatz 5: *Es werde für $y>0$*

$$f(y)=\sum_{p,m}\chi(p^m)\log p\, e^{-p^m y}$$

gesetzt. Dann ist bei $y\to 0$

$$f(y)=-\sum_{\varrho}\Gamma(\varrho)y^{-\varrho}+O(1).$$

($\sum_{\varrho}$ *konvergiert absolut, weil für $0<\sigma<1$ gleichmäßig $\Gamma(s)=O(e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\frac{1}{2}})$ ist und $\sum_{\gamma>0}e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\gamma^{\frac{1}{2}}$ konvergiert.*)

Beweis: Für $y > 0$ ist bekanntlich[1])

$$2\pi i e^{-y} = \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} ds,$$

also

$$2\pi i f(y) = \sum_{p,m} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \chi(p^m) p^{-ms} \log p\, ds$$

$$= \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \sum_{p,m} \chi(p^m) p^{-ms} \log p\, ds = -\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \frac{L'(s)}{L(s)} ds.$$

Man wende nun den Cauchyschen Satz auf den letzten Integranden und das Rechteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $-\frac{1}{2} \pm Ti$ an, wo $T > 0$ wurzelfrei sei. Die Residuensumme ist $\sum_{|\gamma|<T} \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} + \frac{L'(0)}{L(0)}$. Jetzt wachse T wurzelfrei ins Unendliche. Dann strebt $\int_{2-Ti}^{2+Ti}$ nach dem Obigen gegen $-2\pi i f(y)$. Die Integrale über die Horizontalseiten streben gegen 0; dies folgt aus Formel (8) meiner ersten Abhandlung nebst

$$\Gamma(\sigma + ti) = O(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{\frac{3}{2}}) \qquad (-\tfrac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2)$$

und der nach dem Paradigma jenes § 4 durch halbkreisförmige Ausbuchtung zu begründenden Relation

$$\sum_{\varrho}{}'' \int_{2+Ti}^{-\frac{1}{2}+Ti} \Gamma(s) y^{-s} \frac{ds}{s-\varrho} = O(e^{-\frac{\pi}{2}T} T^{\frac{3}{2}} \log T) = o(1).$$

Ferner strebt $\int_{-\frac{1}{2}+Ti}^{-\frac{1}{2}-Ti}$ gegen $\int_{-\frac{1}{2}+\infty i}^{-\frac{1}{2}-\infty i}$; dies Integral konvergiert sogar absolut, weil für $\sigma = -\frac{1}{2}$ nach (2) und (3)

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\frac{1}{2}\log\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} - \frac{1}{2}\log\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} - \frac{L'(1-s)}{L(1-s)} = O(\log t),$$

$$\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)} = O(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{-1} \log t)$$

ist. Zugleich folgt hieraus

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}+\infty i}^{-\frac{1}{2}-\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \frac{L'(s)}{L(s)} ds \right| \leqq y^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma(-\tfrac{1}{2} + ti) \frac{L'(-\frac{1}{2}+ti)}{L(-\frac{1}{2}+ti)} \right| dt = O(y^{\frac{1}{2}}),$$

---

[1]) Vgl. z. B. S. 215—216 meiner Arbeit *Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil* $\frac{1}{2}$ [Mathematische Annalen, Bd. 76 (1915), S. 212—243].

also
$$-2\pi i f(y) = 2\pi i \sum_{\varrho} \Gamma(\varrho)\, y^{-\varrho} + 2\pi i \frac{L'(0)}{L(0)} + O(y^{\frac{1}{2}})$$
$$= 2\pi i \sum_{\varrho} \Gamma(\varrho)\, y^{-\varrho} + O(1).$$

Hilfssatz 6: *Es sei wahr, daß alle $\beta = \frac{1}{2}$ sind. Dann ist*
$$\sum_{\varrho} |\Gamma(\varrho)| < 0{,}84.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 4 ist wegen $\beta = \frac{1}{2}$
$$\sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} < \frac{1}{3},$$
also jedes positive $\gamma > \sqrt{3 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4}} > \frac{3}{2}$. Nun ist für $\gamma > \frac{3}{2}$
$$e^{\frac{\pi}{2}\gamma} > 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \gamma^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \gamma^3 = 1 + \frac{\pi^2}{8}\left(1 + \frac{\pi}{6}\gamma\right)\gamma^2 > \frac{1}{2} + \frac{3{,}1^2}{8}\left(1 + \frac{3}{6}\,\frac{3}{2}\right)\gamma^2$$
$$> \frac{1}{2} + \frac{9{,}6}{8}\,\frac{7}{4}\gamma^2 = \frac{1}{2} + 2{,}1\,\gamma^2 > 2\left(\frac{1}{4} + \gamma^2\right),$$
folglich, wegen
$$|\Gamma(\tfrac{1}{2} + \gamma i)|^2 = \Gamma(\tfrac{1}{2} + \gamma i)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} - \gamma i) = \frac{\pi}{\sin \pi\,(\frac{1}{2} + \gamma i)} = \frac{\pi}{\cos \pi \gamma i} = \frac{2\pi}{e^{\pi\gamma} + e^{-\pi\gamma}} < \frac{2\pi}{e^{\pi\gamma}},$$
$$\sum_{\varrho} |\Gamma(\varrho)| = 2 \sum_{\gamma > 0} |\Gamma(\tfrac{1}{2} + \gamma i)| < 2 \sum_{\gamma > 0} \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{\pi}{2}\gamma}} < \sqrt{2\pi} \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} < \sqrt{6{,}3}\,\frac{1}{3}$$
$$= \sqrt{0{,}7} < 0{,}84.$$

Satz: *Es werde (wie in der ersten Abhandlung) für $y > 0$*
$$g(y) = -\sum_{p} \chi(p)\, e^{-py}$$
gesetzt. Es sei wahr, daß alle $\beta = \frac{1}{2}$ sind (Postulat II*). Dann ist*
$$\liminf_{y=0} \frac{g(y)}{\sqrt{\frac{1}{y} : \log \frac{1}{y}}} > 0,$$
also a fortiori (Tschebyschefs Behauptung I*)*
$$g(y) \to \infty.$$

Beweis: Wird für $y > 0$
$$\varphi(y) = -\sum_{p} \chi(p) \log p\, e^{-py}$$
gesetzt, so ist
$$-f(y) = \varphi(y) - \sum_{p} \log p\, e^{-p^2 y} + \log 2\, e^{-4y} + O \sum_{\substack{p,m \\ m > 2}} \log p\, e^{-p^m y}.$$

Aus $A(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \sim \sqrt{x}$ folgt, daß von einer Stelle h an $A(x) > 0{,}98\sqrt{x}$ ist, also für $y > 0$

$$\sum_p \log p\, e^{-p^2 y} = \sum_{n=1}^{\infty} (A(n) - A(n-1)) e^{-ny} = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) (e^{-ny} - e^{-(n+1)y})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A(n) y \int_n^{n+1} e^{-uy} du = y \int_1^{\infty} A(u) e^{-uy} du > 0{,}98\, y \int_h^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-uy} du$$

$$= 0{,}98\, y \left(\int_0^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-uy} du + O(1) \right) = \frac{0{,}98}{\sqrt{y}} \int_0^{\infty} \sqrt{v}\, e^{-v} dv + O(y)$$

$$= 0{,}98 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Aus $B(x) = \sum_{\substack{p^m \leqq x \\ m \geqq 2}} \log p = O(\sqrt[3]{x})$ folgt

$$\sum_{\substack{p,m \\ m \geqq 3}} \log p\, e^{-p^m y} = y \int_1^{\infty} B(u) e^{-uy} du = O\left(y \int_0^{\infty} \sqrt[3]{u}\, e^{-uv} du\right)$$

$$= O\left(y^{-\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \sqrt[3]{v}\, e^{-v} dv\right) = O(y^{-\frac{1}{3}}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Daher ist mit Rücksicht auf Hilfssatz 5 und 6 für alle hinreichend kleinen positiven y

$$\varphi(y) = \sum_p \log p\, e^{-p^2 y} - \log 2\, e^{-4y} - O \sum_{\substack{p,m \\ m \geqq 3}} \log p\, e^{-p^m y} - f(y)$$

$$> 0{,}96 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{\varrho} |\Gamma(\varrho)| = \frac{\varkappa}{\sqrt{y}},$$

wo $\varkappa > 0{,}48 \sqrt{\pi} - 0{,}84 > 0{,}48 \frac{7}{4} - 0{,}84 = 0$ ist. Aus Hilfssatz 3 folgt also die Behauptung.

Berlin, den 26. Dezember 1917.

(Eingegangen am 26. Dezember 1917.)