Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie

Landau, E.,

in: Periodical issue | Mathematische Zeitschrift

- 1 | Periodical

24 page(s) (1 - 24)

Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Erstes Kapitel.
Zwei Behauptungen von Tschebyschef.

§ 1.
Die erste Behauptung.

Tschebyschef sagte im Jahre 1853 in einem damals gedruckten Briefe an Fuss (5 in der Numerierung des Literaturverzeichnisses meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*), er sei im Besitze eines Beweises des Satzes

I: *Die Summe der für* $c > 0$ *konvergenten Reihe*

$$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + e^{-19c} + e^{-23c} - \dots$$

(*wo den Primzahlen* $4k+1$ *das negative, den Primzahlen* $4k+3$ *das positive Zeichen entspricht) strebt für* $c \to 0$ *gegen* $+\infty$.

Publiziert hat Tschebyschef seinen vermeintlichen Beweis nie; aber er hat 25 Jahre später (6) die obige Mitteilung in ähnlichem Zusammenhange wiederholt.

Ich habe schon vor 10 Jahren (**33**, S. 156) in Zweifel gezogen, daß er im Besitze eines (richtigen) Beweises gewesen sei. Jetzt habe ich gefunden und werde es nachher beweisen, daß aus der Richtigkeit von I folgen würde:

II: *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} + \dots, \tag{1}$$

wo $\chi(n)$ *den Nicht-Hauptcharakter modulo 4 bezeichnet, ist in der Halb-*

ebene $\sigma > \frac{1}{2}$ *von Null verschieden, so daß zufolge der bekannten Malmsténschen Funktionalgleichung (vgl. z. B. Handbuch, S. 497)*

$$L(1-s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\,L(s)$$

für die in der Halbebene $\sigma > 0$ *durch* (1) *definierte ganze Funktion* $L(s)$ *alle ihre unendlich vielen von* $-1, -3, -5, \ldots$ *verschiedenen Wurzeln auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *liegen.*

Damit wird Tschebyschefs Behauptung I natürlich weder bewiesen noch widerlegt sein; aber die Tatsache, daß sie das Korollar II von der Tiefe der — analogen — unbewiesenen Riemannschen Vermutung über die Zetafunktion ($\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, also auch für $0 \leqq \sigma < \frac{1}{2}$) mit sich zieht, erhöht für Ungläubige die Wahrscheinlichkeit, daß Tschebyschef sich geirrt hat, und für Gläubige den Wunsch, aus seinen Papieren den Beweis von I rekonstruiert zu sehen. (In meiner Arbeit 21 *Über einen Satz von Tschebyschef*, die von einer anderen in 5 ohne Beweis von Tschebyschef ausgesprochenen, durch Herrn Phragmén (1) als richtig festgestellten Behauptung handelt, hatte ich analog II aus je einer falsch bewiesenen Behauptung von Cesàro, Herrn Pellet und Herrn Torelli gefolgert.)

Tschebyschefs Behauptung I besagt offenbar

$$g(c) = -\sum_p \chi(p) e^{-pc} \to \infty \text{ für } c \to 0, \tag{2}$$

d. h.

$$\sum_p \chi(p) x^p \to -\infty \text{ für } x \to 1$$

bei Annäherung von links.

§ 2.

Hilfssatz.

Voraussetzung: *Es sei* $q > 0$, $f(x)$ *für* $0 < x \leqq q$ *stetig und* $\geqq 0$. *Es sei das (bei* $x = 0$ *uneigentliche) Integral*

$$\int_0^q x^{s-1} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_\varepsilon^q x^{s-1} f(x)\,dx \tag{3}$$

für $s > \eta$ *konvergent (vorhanden), also für* $\sigma > \eta$ *konvergent, also für* $\sigma > \eta + \delta$, $\delta > 0$ *gleichmäßig konvergent und (da* $\int_\varepsilon^q$ *offenbar bei jedem festen positiven* $\varepsilon < q$ *eine ganze Funktion von s ist) für* $\sigma > \eta$ *eine reguläre Funktion* $\varphi(s)$ *von s. Diese Funktion* $\varphi(s)$ *sei für die (reellen) s der Strecke* $\varkappa < s \leqq \eta$ *regulär, wo* $\varkappa$ *eine gewisse Zahl* $< \eta$ *ist.*

Behauptung: *Das Integral* (3) *konvergiert für* $s > \varkappa$; $\varphi(s)$ *ist also* (*wegen der eo ipso gleichmäßigen Konvergenz von* (3) *für* $\sigma > \varkappa + \delta$, $\delta > 0$) *in der Halbebene* $\sigma > \varkappa$ *regulär.*

Vorbemerkung: Der Hilfssatz folgt zwar durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$,

$$\int_0^q x^{s-1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) y^{-s-1}\,dy$$

aus meinem Satz auf S. 548 der Arbeit **21**, d. i. aus dem Satz X''' meiner Arbeit **27**; doch ist der direkte Beweis durch meine damalige Methode nur wenige Zeilen lang und soll daher ausgeführt werden.

Beweis: Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < q \leqq 1$ angenommen werden. Wäre die Behauptung falsch, so bezeichne ich mit λ die untere Grenze der reellen s, für die (3) konvergiert; es wäre $\varkappa < \lambda \leqq \eta$. Da (3) für $s > \lambda$ konvergiert, konvergiert es für $\sigma > \lambda + \delta$ $\delta > 0$ gleichmäßig, so daß $\varphi(s)$ für $\sigma > \lambda$ regulär ist, durch (3) dargestellt wird und beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiierbar ist. Da $s = \lambda$ nach Voraussetzung regulär wäre, so wäre der Konvergenzradius der in der Umgebung von $s = \lambda + 1$ gültigen Potenzreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(\lambda+1)}{n!}(s-\lambda-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-\lambda-1)^n}{n!} \int_0^q x^{\lambda} \log^n x\, f(x)\,dx$$

größer als 1; bei passender Wahl eines $\varDelta > 0$ konvergierte diese Potenzreihe also in $s = \lambda - \varDelta$; dies ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varDelta-1)^n}{n!} \int_0^q x^{\lambda} \log^n x\, f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varDelta+1)^n}{n!} \int_0^q x^{\lambda}(-\log x)^n f(x)\,dx.$$

Wegen $f(x) \geqq 0$ ist für alle $n \geqq 0$ und alle x der Strecke $0 < x \leqq q$

$$\frac{(\varDelta+1)^n}{n!} x^{\lambda}(-\log x)^n f(x) \geqq 0,$$

also die Summation mit der Integration vertauschbar. Es würde also das Integral

$$\int_0^q x^{\lambda} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varDelta+1)^n}{n!}(-\log x)^n\,dx = \int_0^q x^{\lambda} f(x)\, e^{-(\varDelta+1)\log x}\,dx = \int_0^q x^{\lambda-\varDelta-1} f(x)\,dx$$

konvergieren, entgegen der Definition von λ.

§ 3.

Schluß von I auf II.

Für $s > 0$ ist

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx;$$

für $s > 0$ und jede Primzahl p ist also

$$\frac{\Gamma(s)}{p^s} = \frac{1}{p^s} \int_0^\infty (p x)^{s-1} e^{-px} p\, dx = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-px} dx.$$

Für $s > 1$ ist demnach, wenn $\chi(n)$ den Nicht-Hauptcharakter modulo 4 bezeichnet,

$$\Gamma(s) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_p \int_0^\infty x^{s-1} \chi(p) e^{-px} dx = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_p \chi(p) e^{-px} dx.$$

(Denn die Summation ist mit der Integration vertauschbar, weil die Majorante

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s) \zeta(s)$$

konvergiert.) Also wäre, wenn $g(x)$ die Bedeutung aus (2) hat,

$$-\Gamma(s) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \int_0^\infty x^{s-1} g(x) dx.$$

Es sei q irgendeine positive Zahl. Da

$$\int_q^\infty x^{s-1} g(x) dx$$

eine ganze Funktion von s ist (weil das Integral $\int_q^\omega$ gleichmäßig für $\sigma \leqq \sigma_1$ gegen einen Grenzwert strebt, wenn ω unendlich wird), ist für $\sigma > 1$

$$\int_0^q x^{s-1} g(x) dx = -\Gamma(s) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R_1(s),$$

wo $R_1(s)$ ganz ist.

Nun ist für $\sigma > 1$

$$L(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}};$$

ein ebenda regulärer Zweig des Logarithmus hiervon ist

$$\log L(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p,\, m \\ m > 1}} \frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R_2(s),$$

wo $R_2(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär ist; für $\sigma > 1$ ist also

$$(4) \qquad \int_0^q x^{s-1} g(x)\,dx = -\Gamma(s) \log L(s) + R_3(s),$$

wo $R_3(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär ist. Nun ist für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ die Funktion $L(s)$ positiv, also die rechte Seite von (4) regulär. Die für $\sigma > 1$ durch

$$(5) \qquad \int_0^q x^{s-1} g(x)\,dx$$

definierte Funktion ist also für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär.

Es sei nun I erfüllt, d. h.

$$\lim_{x=0} g(x) = \infty;$$

oder es sei nur

$$\liminf_{x=0} g(x) > 0$$

oder auch nur bei passender Wahl von $q > 0$ für $0 < x \leqq q$

$$g(x) \geqq 0.$$

Nach dem Hilfssatz des § 2, auf $f(x) = g(x)$, $\eta = 1$, $\varkappa = \frac{1}{2}$ angewendet, ist die für $\sigma > 1$ durch (5) definierte Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, also nach (4) ebenda $\log L(s)$ regulär,

$$L(s) \neq 0,$$

q. e. d.

§ 4.

Weitere Folgerungen aus I.

Aus I folgte II, und aus II würde nach S. 866—867 des *Handbuchs* folgen:

III: *Die Reihe*

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

konvergiert für $\sigma > \frac{1}{2}$; *d. h. für jedes* $\delta > 0$ *ist*

$$P(x) = \sum_{p \leqq x} \chi(p) = O(x^{\frac{1}{2}+\delta}).$$

Folgendes ist sehr bemerkenswert. Tschebyschef interpretiert (6) seine Behauptung I populär so: Es gibt viel mehr Primzahlen $4k+3$ als $4k+1$. Und aus I folgt nun im Gegenteil, daß die Differenz beider Anzahlen bis x absolut genommen viel kleiner $\{$nämlich $O(x^{\frac{1}{2}+\delta})\}$ ist, als bisher bekannt war, nämlich $O(x\,e^{-\alpha\sqrt{\log x}})$; d. h. daß beide Anzahlen viel näher, als bekannt war, aneinander liegen.

Ich behaupte schärfer, daß aus I folgen würde:

IV: *Es ist*

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}}\log x). \tag{6}$$

Vorbemerkung: Ein Beweis wäre, da II aus I folgen würde, nach dem Paradigma des § 94 meines *Handbuchs* möglich [wo ich die zuerst von Herrn von Koch, später anders von Herrn Holmgren bewiesene Tatsache begründet habe, daß aus der Riemannschen Vermutung

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

folgt]. Doch will ich von II aus für (6) eine vereinfachte Beweisanordnung vollständig ausführen und überlasse dem Leser, nach dem neuen Paradigma sich die entsprechende Beweisführung des von Kochschen Satzes zu überlegen.

Beweis: Es ist für $\sigma > 1$ (*Handbuch*, S. 420)

$$-\frac{L'(s)}{L(s)} = \sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{ms}},$$

also für $x > 1$ (*Handbuch*, S. 181)

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2}\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{p,m}\chi(p^m)\log p\int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i}\left(\frac{x}{p^m}\right)^s\frac{1}{s^2}\,ds$$

$$= \sum_{p^m\leq x}\chi(p^m)\log p\,\log\frac{x}{p^m}. \tag{7}$$

Es sei $T > 0$ nicht Ordinate einer Wurzel von $L(s)$. Es ist (*Handbuch*, S. 512)

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

wo $\varrho = \beta + \gamma i$ die „nicht trivialen" Wurzeln bezeichnet und $\sum\limits_{\varrho}$ absolut konvergiert. Wird $\sum_\varrho$ in $\sum_\varrho' + \sum_\varrho''$ geteilt, wo $|T-\gamma| \geqq 1$ in $\sum'$, $|T-\gamma| < 1$ in $\sum''$ ist, so ist in

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \sum_\varrho'\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right) + \sum_\varrho''\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig bei wachsendem T nach S. 520

$$\sum_\varrho'\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right) = O(\log T)$$

und nach S. 334

$$b - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = O(\log T);$$

ferner ist, da $\sum''$ nach S. 519 nur $O(\log T)$ Glieder hat,

$$\sum_\varrho''\frac{1}{\varrho} = O\left(\frac{\log T}{T}\right) = O(\log T);$$

demnach ist bei „wurzelfrei" wachsendem T für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = \sum_\varrho''\frac{1}{s-\varrho} + O(\log T). \tag{8}$$

Ich wende nun den Cauchyschen Satz auf

$$\int \frac{x^s}{s^2}\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds \qquad (x > 1)$$

und das bei -1 durch einen kleinen Halbkreis nach links ausgebuchtete Rechteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $-1 \pm Ti$ an, wo T, also auch $-T$ „wurzelfrei" ist.

1. Die Residuensumme darin ist

$$\frac{1}{x} + a_0 + a_1 \log x + \sum_{|\Im\varrho|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho^2}.$$

2. Das Integral über die Horizontalseiten strebt, wenn T „wurzelfrei" ins Unendliche rückt, gegen 0; dies braucht nur für die obere gezeigt zu werden. Wegen (8) und der gleichmäßigen Abschätzung

$$\frac{x^s}{s^2} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

genügt es

$$\sum_{\varrho}'' \int \frac{x^s}{s^2} \frac{1}{s-\varrho} ds \to 0$$

zu zeigen, und dies folgt daraus, daß $\sum''$ nur $O(\log T)$ Glieder hat, und daß für $T > \frac{3}{2}$ jedes dieser Integrale, wenn der Weg im Falle $T - 1 < \gamma < T$ durch den Halbkreis nach oben, im Falle $T < \gamma < T+1$ durch den Halbkreis nach unten ersetzt wird, absolut $\leqq$ Weglänge · Maximum des absoluten Betrages des Integranden $\leqq \frac{3}{2} \pi \frac{x^2}{\left(T - \frac{3}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1}$ ist.

3. Das Integral

$$\int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds$$

(wo der Weg bei -1 nach links ausgebuchtet ist) konvergiert, da für $\sigma = -1$ nach S. 516

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = O(\log t)$$

ist und $\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2} dt$ konvergiert. Aus dem gleichen Grunde ist

$$\left| \int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds \right| \leqq x^{-1} \int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \left| \frac{1}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} \right| |ds| = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Cauchysche Satz mit darauffolgendem $\lim_{T=\infty}$ ergibt also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds = \frac{1}{x} + a_0 + a_1 \log x + \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + \int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{L'(s)}{L(s)} ds$$

(9) $$= a_0 + a_1 \log x + \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\sum_{\varrho}$ absolut konvergiert.

Aus (7) und (9) folgt

(10) $$\sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \log \frac{x}{p^m} = -a_0 - a_1 \log x - \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wird nun

$$\sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p = Q(x)$$

gesetzt, so ist

$$\int_1^x \frac{Q(y)}{y}\,dy = \int_1^x \frac{dy}{y} \sum_{p^m \leqq y} \chi(p^m) \log p = \sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \int_{p^m}^x \frac{dy}{y}$$

$$= \sum_{p^m \leqq x} \chi(p^m) \log p \log \frac{x}{p^m},$$

also gleich der rechten Seite von (10). Folglich ist, wenn dies auch für $x+1$ statt x aufgeschrieben und subtrahiert wird,

$$\int_x^{x+1} \frac{Q(y)}{y}\,dy = -a_0 - a_1 \log(x+1) - \sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) + a_0 + a_1 \log x$$

$$+ \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) = - \sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho - x^\varrho}{\varrho^2} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

also, weil bei ganzem x das Integral

$$= Q(x) \int_x^{x+1} \frac{dy}{y} = Q(x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

ist, für ganzzahlig wachsendes x

$$Q(x) = -\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho - x^\varrho}{\varrho^2} + O(1).$$

Nun wäre in $\varrho = \beta + \gamma i$ nach II stets $\beta = \frac{1}{2}$, also einerseits

$$|(x+1)^\varrho - x^\varrho| \leqq (x+1)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} < (2x)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} < 3x^{\frac{1}{2}},$$

andererseits

$$|(x+1)^\varrho - x^\varrho| = |\varrho \int_x^{x+1} u^{\varrho-1} du| < |\varrho| x^{-\frac{1}{2}};$$

folglich wäre bei ganzzahlig wachsendem x

$$\sum_\varrho \frac{(x+1)^\varrho - x^\varrho}{\varrho^2} = O \sum_{|\Im\varrho| \leqq x} \frac{|\varrho| x^{-\frac{1}{2}}}{|\varrho|^2} + O \sum_{|\Im\varrho| > x} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{|\varrho|^2}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} O \sum_{|\Im\varrho| \leqq x} \frac{1}{|\varrho|} + x^{\frac{1}{2}} O \sum_{|\Im\varrho| > x} \frac{1}{|\varrho|^2} = x^{-\frac{1}{2}} O \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n} + x^{\frac{1}{2}} O \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$= O(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \frac{\log x}{x}\right) = O(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x),$$

$$Q(x) = O(\sqrt{x} \log^2 x),$$

$$R(x)=\sum_{p\leqq x}\chi(p)\log p=Q(x)-\sum_{\substack{p^m\leqq x\\ m>1}}\chi(p^m)\log p=Q(x)+O\sum_{\substack{p^m\leqq x\\ m>1}}\log p$$
$$=O(\sqrt{x}\log^2 x);$$

$$P(x)=\sum_{p\leqq x}\chi(p)=\sum_{n=2}^{x}\frac{R(n)-R(n-1)}{\log n}=\sum_{n=2}^{x}R(n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+\frac{R(x)}{\log(x+1)}$$
$$=O\sum_{n=2}^{x}\sqrt{n}\log^2 n\frac{1}{n\log^2 n}+O(\sqrt{x}\log x)=O\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{\sqrt{n}}+O(\sqrt{x}\log x)$$
$$=O(x^{\frac{1}{2}}\log x).$$

Damit ist (6) für ganzzahlig wachsendes x, also auch für stetig wachsendes x bewiesen

§ 5.

Die zweite Tschebyschefsche Behauptung.

Tschebyschef sagte in dem Brief (5) vom Jahre 1853 weiter, er besitze einen Beweis des Satzes — ich muß zur Vermeidung von Mißverständnissen wörtlich zitieren —

V: *La série*

(11) $f(3)-f(5)+f(7)+f(11)-f(13)-f(17)+f(19)+f(23)-\ldots,$

où $f(x)$ *est une fonction constamment décroissante, ne peut être convergente, à moins que la limite du produit* $f(x)\cdot x^{\frac{1}{2}}$, *pour* $x=\infty$, *ne soit zéro.*

Es wird also
$$f(3)>f(5)>f(7)>\ldots$$
vorausgesetzt, ferner die Konvergenz von (11), so daß $f(p)$ gegen 0 strebt, also beständig >0 ist. Behauptet wird, wenn $f(x)$ für alle $x\geqq 3$ so definiert ist, daß es monoton abnimmt:

$$f(x)=o(x^{-\frac{1}{2}}); \tag{12}$$

vielleicht meint Tschebyschef auch nur, daß im Falle der Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x=\infty}x^{\frac{1}{2}}f(x)$ dieser 0 ist. Bei keiner der beiden Interpretationen vermag ich den Satz V zu beweisen noch zu widerlegen; natürlich ist
$$f(p)=o(p^{-\frac{1}{2}})$$
für wachsende Primzahl p mit (12) identisch; denn liegt x zwischen den beiden konsekutiven Primzahlen $p_n\leqq x$ und $p_{n+1}>x$, so folgt, weil nach

einer anderen Tschebyschefschen Arbeit (4, vgl. S. 92 des *Handbuchs*)

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 2 \tag{13}$$

ist, bei wachsendem x (es ist n eine Funktion von x)

$$f(x) \leqq f(p_n) = o\left(p_n^{-\frac{1}{2}}\right) = o\left(p_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\right) = o\left(x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Genau so, wie ich aus I eine Folgerung III in umgekehrter Richtung zog („Es gibt in schärferem Sinne als bekannt etwa ebenso viele Primzahlen $4k+1$ als $4k+3$"), werde ich jetzt aus I einen Satz über (11) in umgekehrter Richtung wie V (hinreichende statt notwendiger Konvergenzbedingung) folgern, nämlich

VI: Voraussetzung: *Es sei*

$$f(3) > f(5) > f(7) > \cdots$$

und für irgendein $\delta > 0$

$$f(p) = O\left(\frac{1}{p^{\frac{1}{2}+\delta}}\right),$$

also nach (13), *wenn* $f(x)$ *irgendwie so interpoliert wird, daß es für* $x \geqq 3$ *beständig abnimmt,*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}\right). \tag{14}$$

$$\left\{ \text{Denn } f(x) \leqq f(p_n) = O\left(\frac{1}{p_n^{\frac{1}{2}+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{p_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}\right). \right\}$$

Behauptung: *Die Reihe*

$$\sum_p \chi(p) f(p)$$

konvergiert.

Beweis: Aus I folgte III; es gibt also ein $c_1 = c_1(\delta)$ derart, daß für alle $x \geqq 1$

$$|P(x)| = \left|\sum_{p \leqq x} \chi(p)\right| < c_1 x^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}$$

ist. Nach (14) gibt es ein $c_2 = c_2(\delta)$ derart, daß für alle $x \geqq 3$

$$0 < f(x) < \frac{c_2}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

ist.

Für ganze v, w mit $w \geqq v \geqq 3$ ist also

$$\sum_{v \leqq p \leqq w} \chi(p) f(p) = \sum_{n=v}^{w} \{P(n) - P(n-1)\} f(n)$$

$$= \sum_{n=v}^{w} P(n)\{f(n) - f(n+1)\} - P(v-1) f(v) + P(w) f(w+1),$$

also wegen der Monotonie des $f(x)$

$$\Big|\sum_{v\leqq p\leqq w}\chi(p)f(p)\Big| < c_1 \sum_{n=v}^{w} n^{\frac12+\frac\delta2}\{f(n)-f(n+1)\} + c_1 v^{\frac12+\frac\delta2}\frac{c_2}{v^{\frac12+\delta}} + c_1 w^{\frac12+\frac\delta2}\frac{c_2}{w^{\frac12+\delta}}$$

$$= c_1\sum_{n=v}^{w} f(n)\Big\{n^{\frac12+\frac\delta2} - (n-1)^{\frac12+\frac\delta2}\Big\} + c_1 f(v)(v-1)^{\frac12+\frac\delta2} - c_1 f(w+1)\, w^{\frac12+\frac\delta2}$$

$$+ \frac{c_1c_2}{v^{\frac\delta2}} + \frac{c_1c_2}{w^{\frac\delta2}}$$

$$< c_1c_2 \sum_{n=v}^w \frac{1}{n^{\frac12+\delta}}\left(\frac12+\frac\delta2\right)\int_{n-1}^n u^{-\frac12+\frac\delta2}\,du + c_1\frac{c_2}{v^{\frac12+\delta}}\, v^{\frac12+\frac\delta2} + \frac{c_1c_2}{v^{\frac\delta2}}+\frac{c_1c_2}{w^{\frac\delta2}}$$

$$< c_1c_2\left(\frac12+\frac\delta2\right)\sum_{n=v}^w\int_{n-1}^n \frac{u^{-\frac12+\frac\delta2}}{u^{\frac12+\delta}}\,du + \frac{3c_1c_2}{v^{\frac\delta2}} < c_1c_2\left(\frac12+\frac\delta2\right)\int_{v-1}^\infty \frac{du}{u^{1+\frac\delta2}} + \frac{3c_1c_2}{v^{\frac\delta2}},$$

was von w frei ist und für $v \to \infty$ gegen 0 strebt.

Zweites Kapitel.

Eine Vermutung von Herrn Lerch.

§ 6.

Widerlegung der Lerchschen Vermutung.

Herr Lerch hat in der Nr. 3 seiner Arbeit 17 Schlüsse aus folgender Annahme gezogen; er betont selbst ausdrücklich, daß sie eine heuristische ist, und sagt, daß sie wahrscheinlich richtig sei.

Es sei D eine sog. Fundamentaldiskriminante (d. h. eine ganze positive Zahl > 1 oder eine ganze negative Zahl, $\equiv 0$ oder 1 (mod. 4), durch kein ungerades Primzahlquadrat teilbar und im Falle $D \equiv 0$ (mod. 4) von der Gestalt $D \equiv 8$ oder 12 (mod. 16)). Es sei $\left(\frac{D}{n}\right)$ das Jacobi-Kroneckersche Symbol (das bekanntlich für zu D nicht teilerfremde n Null ist, sonst ± 1

und für $n > 0$ einen reellen Charakter $\chi(n)$ modulo $|D|$ darstellt). Bekanntlich ist (Herr Lerch schreibt $P(D, s)$ für dies $L(s)$)

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

für $\sigma > 0$ konvergent und definiert eine ganze Funktion von s (*Handbuch*, S. 475). Bekanntlich ist für $\sigma > 1$

$$L(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p^s}} \qquad (\textit{Handbuch}, \text{ S. } 458),$$

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\sum_{p,\, m} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{ms}} \qquad (\textit{Handbuch}, \text{ S. } 420),$$

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^s - \left(\frac{D}{p}\right)}. \tag{15}$$

Das Lerchsche Postulat lautet nun:

VII: *Es ist*

$$L(\tfrac{1}{2}) \neq 0 \tag{16}$$

und (15) *für* $s = \frac{1}{2}$ *gültig, d. h.*

$$\frac{L'(\frac{1}{2})}{L(\frac{1}{2})} = -\sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p} - \left(\frac{D}{p}\right)}.$$

Ich werde zeigen, daß dies Postulat für jedes einzelne D falsch ist, ja sogar, daß für jedes einzelne D die Reihe

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p} - \left(\frac{D}{p}\right)} \tag{17}$$

divergiert (mag (16) gelten oder nicht).

Wäre (17) konvergent, so wäre wegen

$$\left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{\sqrt{n} - \left(\frac{D}{n}\right)} = \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{\sqrt{n}} + \left(\frac{D}{n}\right)^2 \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)$$

die Reihe

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} + \left(\frac{D}{p}\right)^2 \frac{\log p}{p}\right)$$

konvergent, also $\left(\text{da } \left(\frac{D}{p}\right)^2 \text{ bis auf endlich viele } p \text{ gleich 1 ist}\right)$, die Reihe

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} + \frac{\log p}{p}\right) = a \tag{18}$$

konvergent (was auch Herr Lerch benutzt). Nach dem Analogon zum Abelschen Stetigkeitssatz (über Potenzreihen) für Dirichletsche Reihen (*Handbuch*, S. 107) wäre also

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} + \frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{p^s} = f(s) \tag{19}$$

für $s > 0$ konvergent und bei $s \to 0$

$$f(s) \to a. \tag{20}$$

Für $s > 0$ wäre also

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}}$$

konvergent; es konvergierte also

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^s}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$; daher wäre für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^s} + \sum_{\substack{p,\,m\\ m>1}} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{ms}} = -\frac{L'(s)}{L(s)}$$

regulär, also für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$L(s) \neq 0.$$

Für $s > 0$ wäre nun

$$-\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} = \sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} + \sum_{\substack{p,\,m\\ m>1}} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{m(s+\frac{1}{2})}}$$

$$= \sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} + \sum_p \left(\frac{D}{p}\right)^2 \frac{\log p}{p^{2s+1}} + \varphi_1(s),$$

wo $\varphi_1(s)$ für $3(\sigma+\frac{1}{2}) > 1$, d. h. $\sigma > -\frac{1}{6}$ regulär ist, also sicher (wie auch nachher $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$, $\varphi_4(s)$, $\varphi_5(s)$) für abnehmendes $s \to 0$ einen Limes hat. Demnach wäre für $s > 0$

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} = -\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} - \sum_p \frac{\log p}{p^{2s+1}} + \varphi_2(s)$$

$$= -\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} + \varphi_3(s). \tag{21}$$

Nach (19) und (20) wäre aber für $s > 0$

$$\sum_p \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^{s+\frac{1}{2}}} = -\sum_p \frac{\log p}{p^{s+1}} + f(s) = \frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} + \varphi_4(s),$$

$$-\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} - \frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} = \varphi_5(s). \tag{22}$$

Wenn nun $s = \frac{1}{2}$ keine Nullstelle von $L(s)$ ist, so hat die linke Seite von (22) in $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$; wenn $s = \frac{1}{2}$ Nullstelle $v$ter Ordnung von $L(s)$ ist, hat die linke Seite von (22) in $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-v - \frac{1}{2} + 1 = -v + \frac{1}{2}$. Niemals also existierte ein (endlicher!) Grenzwert von $\varphi_5(s)$, wenn s zu 0 abnimmt.

§ 7.

Beziehungen zu Cesàro.

Herr Lerch hatte aus dem Postulat VII wegen (18) geschlossen:

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} + a + o(1),$$

so daß nach Herrn Mertens' Relation (*Handbuch*, S. 99)

$$\sum_{p < x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \tag{23}$$

sich

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -\log x + O(1) \tag{24}$$

ergäbe (übrigens nach Herrn de la Vallée Poussins schärferer Relation (*Handbuch*, S. 198)

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + E + o(1) \tag{25}$$

sogar

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -\log x + a_1 + o(1), \tag{26}$$

wo a_1 nur von D abhinge).

Hierzu bemerkt Herr Lerch (aus dem Tschechischen übersetzt): „Mit diesen Ergebnissen scheinen die ebenfalls nicht fest begründeten Betrachtungen im Einklange zu stehen, welche Herr Ern. Cesàro in seiner Arbeit ... (**12**) veröffentlichte; dieselben beziehen sich auf den Fall $D = -4$ und beschäftigen sich mit etwas anderen Ausdrücken, als deren Quelle die Formel (24) dienen kann."

Hierzu bemerke ich, daß die betreffende, bei Cesàro falsch begründete Formel (von der ich nicht weiß, ob sie richtig oder falsch ist)

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{-4}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{p}} = -\frac{1}{2} \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{p} + a_2 + o(1) \tag{27}$$

mit (24) nicht in Einklang, sondern in Widerspruch steht. Denn aus (23) und (24) folgt

$$\sum_{p<x}\left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{p}\right)\log p = O(1),$$

so daß nach einem bekannten Reihensatz (vgl. *Handbuch*, S. 107)

$$\sum_{p}\left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{p}\right)$$

konvergiert, also a fortiori

$$\sum_{p<x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{p}} = -\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p} + O(1) \tag{28}$$

ist. (27) und (28) vertragen sich nicht, da nach Herrn Mertens (vgl. *Handbuch*, S. 102)

$$\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p} = \log\log x + O(1),$$

also

$$\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p} = \log\log x + O(1)$$

ist, so daß für $D = -4$ nach (27) und (28)

$$-\tfrac{1}{2}\log\log x + O(1) = -\log\log x + O(1),$$

$$\tfrac{1}{2}\log\log x = O(1)$$

wäre.

Im Einklang mit Cesàro steht somit unter allen denkbaren Vermutungen der Gestalt

$$\sum_{p<x}\left(\frac{-4}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = A\log x + O(1)$$

[siehe (24)] lediglich die Möglichkeit $A = -\frac{1}{2}$. Auch mit der Wirklichkeit kann, sogar für jede einzelne Fundamentaldiskriminante D, eine Formel

$$\sum_{p\leqq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = A\log x + O(1) \tag{29}$$

höchstens dann in Einklang stehen, wenn $A = -v - \frac{1}{2}$ ist, wo $v \geqq 0$ die Vielfachheit der etwaigen Wurzel $s = \frac{1}{2}$ von $L(s)$ bezeichnet. Denn aus (23) und (29) folgt

$$\sum_{p\leqq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = A\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p} + O(1),$$

$$\sum_{p\leqq x}\left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} - A\frac{\log p}{p}\right) = O(1);$$

also konvergiert die Dirichletsche Reihe

$$\sum_p \left(\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} - A\frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{p^s}$$

für $s > 0$ und ist dort beschränkt. Für $s > 0$ ist [siehe (21)] diese Funktion

$$= -\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} + A\frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} + \varphi(s),$$

wo $\varphi(s)$ für abnehmendes $s \to 0$ einen Limes hat. Daher ist

$$-\frac{L'(s+\frac{1}{2})}{L(s+\frac{1}{2})} + \frac{\zeta'(2s+1)}{\zeta(2s+1)} + A\frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)}$$

im Punkte $s = 0$ regulär, also

$$-v - \tfrac{1}{2} - A = 0.$$

Also kann sicher die von Herrn Lerch in der Konsequenz (26) aus VII mit $A = -1$ postulierte Gleichung

$$\sum_{p \leq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = A\log x + B + o(1)$$

höchstens mit $A = -v - \frac{1}{2}$ bestehen.

Ich werde aber — bereits mit klassischen Mitteln — zeigen [ohne eine zu noch schärferen Resultaten führende Methode von Herrn Littlewood (*Sur la distribution des nombres premiers*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 158 (1914), S. 1869 bis 1872) heranzuziehen]: Auch jene modifizierte Vermutung

$$\sum_{p \leq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = -(v+\tfrac{1}{2})\log x + B + o(1) \tag{30}$$

ist für jedes D (und jedes dazu gewählte $B = B(D)$) falsch.

Aus (30) und (25) folgt

$$\sum_{p \leq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} + \sum_{p \leq \sqrt{x}}\left(\frac{D}{p}\right)^2\frac{\log p}{p} + v\sum_{p \leq x}\frac{\log p}{p} = -(v+\tfrac{1}{2})\log x + B + o(1)$$
$$+ B_1 + \log(\sqrt{x}) + E + o(1) + v\log x + vE + o(1) - B_2 + o(1);$$

wegen der absoluten Konvergenz von

$$\sum_{\substack{p,m \\ m>2}}\left(\frac{D}{p}\right)^m\frac{\log p}{p^{\frac{m}{2}}} + v\sum_{\substack{p,m \\ m>1}}\frac{\log p}{p^m}$$

wäre also

$$\sum_{\substack{p,m \\ p^m \leq x}}\left(\frac{D}{p}\right)^m\frac{\log p}{p^{\frac{m}{2}}} + v\sum_{\substack{p,m \\ p^m \leq x}}\frac{\log p}{p^m} = B_3 + o(1).$$

Die Dirichletsche Reihe

$$-\frac{L'(s)}{L(s)} - v\frac{\zeta'(s+\frac{1}{2})}{\zeta(s+\frac{1}{2})} = \sum_{p,m}\left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{ms}} + v\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{m(s+\frac{1}{2})}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

(nach wachsenden n geordnet) würde also für $s=\frac{1}{2}$ konvergieren; also hätte $L(s)$ für $\sigma>\frac{1}{2}$ keine Wurzel (das könnte wahr sein), also sicher für $\sigma=\frac{1}{2}$ Wurzeln, also $-\frac{L'(s)}{L(s)} - v\frac{\zeta'(s+\frac{1}{2})}{\zeta(s+\frac{1}{2})}$ auf $\sigma=\frac{1}{2}$ Pole. Dies verträgt sich nicht mit dem (nur geläufige Schlüsse zusammenhängend formulierenden)

Hilfssatz: *Ist eine Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

für $s=s_0=\sigma_0+t_0 i$ konvergent, so besitzt die für $\sigma>\sigma_0$ durch sie definierte Funktion $k(s)$ auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ keinen Pol.

Beweis: Wird für $N=1, 2, \cdots$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{c_n}{n^{s_0}} = \delta_N$$

gesetzt, so ist

(31) $$\delta_N \to 0$$

und für jedes $t_1 \gtreqless 0$ und $\varepsilon>0$

$$k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{s_0}}\frac{1}{n^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n-\delta_{n+1}}{n^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}}$$

$$= \delta_1 - \sum_{n=2}^{\infty}\delta_n\left(\frac{1}{(n-1)^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}} - \frac{1}{n^{\varepsilon+(t_1-t_0)i}}\right)$$

$$= \delta_1 - (\varepsilon+(t_1-t_0)i)\sum_{n=2}^{\infty}\delta_n\int_{n-1}^{n}\frac{du}{u^{1+\varepsilon+(t_1-t_0)i}},$$

$$|\varepsilon k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon)| \leqq \varepsilon|\delta_1| + \varepsilon\left|\varepsilon+(t_1-t_0)i\right|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\delta_n|}{(n-1)^{1+\varepsilon}},$$

hierin wegen (31) bei $\varepsilon\to 0$

$$\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\delta_n|}{(n-1)^{1+\varepsilon}}\to 0,$$

also

$$\varepsilon k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon)\to 0,$$

$$k(\sigma_0+t_1 i+\varepsilon) = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

so daß $k(s)$ in $s=\sigma_0+t_1 i$ keinen Pol haben kann.

Drittes Kapitel.

Eine Vermutung von Stieltjes.

§ 8.

Widerlegung einer Vermutung von Stieltjes.

Aus dem letzten Hilfssatz folgt sofort die Unrichtigkeit der Vermutung von Stieltjes (4, Bd. 1, S. 163):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\sqrt{n}}$$

konvergiere.

Denn es wäre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, also $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ (Riemannsche Vermutung); also wären auf $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Pole von $\frac{1}{\zeta(s)}$ gelegen, entgegen dem Hilfssatz.

Übrigens sagt Stieltjes, daß er die obige Vermutung nicht beweisen könne, während er bekanntlich im Besitze eines Beweises von

$$M(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) = O(\sqrt{x}) \tag{32}$$

zu sein behauptete. Ob (32) richtig ist, weiß man bekanntlich nicht. (32) besagt mehr als die Riemannsche Vermutung, da aus (32) wegen

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^s} = s \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{M(u)}{u^{s+1}} du \; (\sigma > \tfrac{1}{2}), \tag{33}$$

$$\frac{1}{\zeta(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon)} = O \int_1^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}} du}{u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

die Einfachheit aller Wurzeln von $\zeta(s)$ folgen würde.

Übrigens ergibt sich ebenso rasch, daß

$$M(x) = o(\sqrt{x}) \tag{34}$$

falsch ist; denn für $\sigma > \frac{1}{2}$ würde dann (33) gelten, also

$$\frac{1}{\zeta(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon)} = o \int_1^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}} du}{u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

sein.

Herr **Mertens** (8, S. 780) hatte auf analogem Wege nicht (34) widerlegt, sondern nur die Möglichkeit von

$$M(x) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\delta} x}\right) \tag{35}$$

(d. h. irgendeiner Formel

$$M(x) = O(G(x))$$

mit $G(x) = o(\sqrt{x})$ und konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$), indem aus (35) wegen

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu(n)}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}} = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}}$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} M(n) \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+t_1 i}}\right) + \frac{M(x)}{([x]+1)^{\frac{1}{2}+t_1 i}},$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+t_1 i}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+t_1 i}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

die (auf Grund der Nichtexistenz des Limes von rechts bei Annäherung an einen Pol unmögliche) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ auf der ganzen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ folgen würde.

Analog hatte Herr **von Koch** (2, S. 1245 bis 1246, und *Contribution à la theorie des nombres premiers*, Acta Mathematica, Bd. 33 (1910) {S. 293 bis 320}, S. 295) nur (unter Benutzung einer Mitteilung von Herrn **Phragmén**) die Unmöglichkeit von

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqq x} \log p = x + O\left(x^{\frac{1}{2}-\delta}\right), \qquad \delta > 0$$

konstatiert, während schon durch analoge Schlüsse wie soeben bei $M(x)$ sogar

$$\psi(x) = x + o\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \tag{36}$$

sich als unmöglich herausstellt, weil $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, also im Falle (36) für $\sigma = \frac{1}{2}$ Pole besitzt und wegen der für $\sigma > 1$, unter der Annahme (36) sogar für $\sigma > \frac{1}{2}$ gültigen Identität

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(u) - u}{u^{s+1}}\, du$$

bei jedem $t_1 \gtrless 0$

$$-\frac{\zeta'(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon)}{\zeta(\frac{1}{2} + t_1 i + \varepsilon)} = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

folgen würde. (Übrigens hat Herr Littlewood in der schon oben genannten Note unter Benutzung einer längeren Reihe scharfsinniger Kunstgriffe sogar u. a. bewiesen:

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{\frac{1}{2}}} = -\infty, \qquad \limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty.)$$

Viertes Kapitel.

Eine Behauptung von Herrn Torelli.

§ 9.

Widerlegung einer Behauptung von Herrn Torelli.

Es sei $\chi(n)$ ein Nicht-Hauptcharakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen. Wie ich schon auf S. 532 meiner Arbeit **21** hervorgehoben habe, hat Herr Torelli falsch bewiesen, daß

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \tag{37}$$

für $s = 0$ gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert, d. h. daß

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{2p^{2s}} + \dots + \frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}} + \dots\right) \tag{38}$$

für $0 < s < 1$ konvergiert.

Ich habe aber dort diese Behauptung selbst nicht widerlegt, sondern nur betont, daß aus ihr die Konvergenz von

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \tag{39}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$, also ebenda

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \neq 0 \tag{40}$$

folgen würde.

Ich füge hinzu, daß die Torellische Behauptung über (37), (38) nicht allgemein richtig ist; schärfer: 1. daß sie sogar für jedes einzelne k und jedes zugehörige $\chi(n)$ falsch ist; 2. daß sie sogar für jedes k, χ und jedes einzelne s der Strecke $0 < s < \frac{1}{2}$ falsch ist.

1. Um nur zu zeigen, daß (38) für kein k, χ auf der ganzen Strecke $0 < s < 1$ konvergieren kann, verfahre ich folgendermaßen: Wenn (38) für $0 < s < 1$ konvergiert, konvergiert (39) für $\frac{1}{2} < s < 1$, also für $\sigma > \frac{1}{2}$, also

(38) für $\sigma > \frac{1}{2}$, so daß ebenda (40) gilt. $L(s)$ hätte also unendlich viele Wurzeln auf $\sigma = \frac{1}{2}$.

Weil (38) für $0 < s < 1$ konvergieren würde, konvergierte

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi^2(p)}{2p^{2s}} \right)$$

für $\frac{1}{3} < s < 1$. Es werde ϑ auf der Strecke $\frac{1}{3} < \vartheta < \frac{1}{2}$ so gewählt, daß die dem Charakter χ^2 entsprechende Funktion $L_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2} + \vartheta$ keine Wurzel hat. (Das geht sicher, da $L_2(s)$ nur abzählbar viele Wurzeln hat.) Aus der Konvergenz von

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^\vartheta} + \frac{\chi^2(p)}{2p^{2\vartheta}} \right) = \sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2p^\vartheta} \right) \frac{1}{p^\vartheta}$$

folgt, daß

$$\sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2p^\vartheta} \right) \frac{1}{p^s} = \Psi(s)$$

für $\sigma > \vartheta$ konvergiert und regulär ist, also für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär ist.

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \log L(s) - \frac{1}{2} \sum_p \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}} + \psi_1(s),$$

wo $\psi_1(s)$ (desgl. nachher $\psi_2(s), \ldots, \psi_5(s)$) in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär ist,

$$\sum_p \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}} = \log L_2(2s) + \psi_2(s),$$

$$\sum_p \frac{\chi^2(p)}{2p^{s+\vartheta}} = \frac{1}{2} \log L_2(s + \vartheta) + \psi_3(s),$$

also

$$\Psi(s) = \log L(s) - \frac{1}{2} \log L_2(2s) + \frac{1}{2} \log L_2(s + \vartheta) + \psi_4(s),$$

$$\log L(s) - \frac{1}{2} \log L_2(2s) + \frac{1}{2} \log L_2(s + \vartheta) = \psi_5(s).$$

Aber auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ ist $L_2(s + \vartheta)$ regulär und $\neq 0$; auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$, exkl. $s = \frac{1}{2}$, ist $L_2(2s)$ (*Handbuch*, S. 459) regulär und $\neq 0$; $L(s)$ könnte also auf dieser Geraden nicht unendlich viele Nullstellen haben.

2. Es werde für ein k, χ die Reihe (38) in einem Punkte $s = \Theta$ mit mit $0 < \Theta < \frac{1}{2}$ konvergent angenommen. Das führt folgendermaßen zu einem Widerspruch. Ich setze $\left[\frac{1}{\Theta}\right] = q$. Dann würde wegen $(q+1)\Theta > 1$ die Reihe

$$\sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^\Theta} + \frac{\chi^2(p)}{2p^{2\Theta}} + \cdots + \frac{\chi^q(p)}{qp^{q\Theta}} \right) = \sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2p^\Theta} + \cdots + \frac{\chi^q(p)}{qp^{(q-1)\Theta}} \right) \frac{1}{p^\Theta}$$

konvergieren, also

$$\sum_p \left(\chi(p) + \frac{\chi^2(p)}{2\,p^{\Theta}} + \cdots + \frac{\chi^q(p)}{q\,p^{(q-1)\Theta}}\right)\frac{1}{p^s} = \Omega(s)$$

für $\sigma > \Theta$ konvergieren, also für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär sein.

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \log L(s) - \frac{1}{2}\log L_2(2s) + \omega_1(s),$$

wo $\omega_1(s)$ (desgl. nachher $\omega_2(s), \ldots, \omega_{q+1}(s)$) in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär ist,

$$\sum_p \frac{\chi^2(p)}{2\,p^{s+\Theta}} = \frac{1}{2}\log L_2(s+\Theta) + \omega_2(s),$$

und, wenn $L_3(s), \ldots, L_q(s)$ die den Charakteren $\chi^3, \ldots, \chi^q$ entsprechenden Funktionen sind,

$$\sum_p \frac{\chi^3(p)}{3\,p^{s+2\Theta}} = \frac{1}{3}\log L_3(s+2\,\Theta) + \omega_3(s),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_p \frac{\chi^q(p)}{q\,p^{s+(q-1)\Theta}} = \frac{1}{q}\log L_q(s+(q-1)\,\Theta) + \omega_q(s),$$

also

$$\Omega(s) = \log L(s) - \frac{1}{2}\log L_2(2s) + \frac{1}{2}\log L_2(s+\Theta) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{q}\log L_q(s+(q-1)\,\Theta) + \omega_{q+1}(s).$$

Der Widerspruch ist also da, wenn ich in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ einen nicht reellen Punkt s_0 finden kann, wo zwar $L(s)$ verschwindet, aber keine der Funktionen $L_2(s+\Theta), \ldots, L_q(s+(q-1)\,\Theta)$ verschwindet.

Nun hat $L(s)$ bekanntlich (*Handbuch*, S. 532 bis 533) im Rechteck $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ für genügend großes T mehr als $\frac{1}{2\cdot 3{,}2}\,T\log T$ Wurzeln. Aber nach einem Satze von Herrn Bohr und mir (*Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 37 (1914), S. 269 bis 272) hat jede der Funktionen $L_2(s+\Theta), \ldots, L_q(s+(q-1)\,\Theta)$ dort bei wachsendem T nur $O(T)$ Wurzeln. Es gibt also ein s_0 gewünschter Art.

Göttingen, den 8. Juli 1917.

(Eingegangen am 9. Juli 1917.)

Nachtrag während der Drucklegung (26. 8. 1917).

Heute erhielt ich das soeben erschienene Heft 2 des Bandes 41 der Acta Mathematica. Von der darin enthaltenen hochbedeutsamen Arbeit der Herren Hardy und Littlewood *Contributions to the theory of the Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes* (S. 119 bis 196) beschäftigt sich der Abschnitt 2. 3 *On an assertion of Tschebyschef* (S. 141 bis 151) mit der ersten Tschebyschefschen Behauptung I meiner gegenwärtigen Abhandlung. Ich lerne zu meiner Freude von den Herren Hardy und Littlewood, daß aus der Richtigkeit von II die Richtigkeit von I folgen würde, durch eine längere, kräftige Hilfsmittel heranziehende Beweiskette. Und ich habe, ohne es zu kennen, ein Desideratum der Herren Hardy und Littlewood erfüllt, indem ich oben bewiesen habe, daß umgekehrt II aus I folgt. Denn sie sagen im Abschnitt 1. 2 der Einleitung (S. 122): *There seems to be little doubt that, if this assumption* (II) *is false, then Tschebyschef's assertion* (I) *is also false, but this we have not succeeded in proving rigorously*[1]). *The difficulties which have debarred us from a proof are of the same nature as those which have prevented us from deducing the inequalities . . . from our explicit formula for the function . . .* Und sie bemerken im Textabschnitt selbst (S. 148): *We have thus established the truth of Tschebyschef's assertion, under the assumption of the truth of the analogue of the Riemann hypothesis. The nature of the proof makes it seem almost certain that the assertion must be false if the hypothesis is false, as the term . . . must then be overwhelmed by oscillatory terms of higher order. But, as we explained in 1.2, we have been unable to find a rigorous proof.*

Ich füge noch hinzu, daß aus meinem in § 3 bewiesenen Satz „aus $g(x) \geqq 0$ für $0 < x \leqq q$ folgt II“ in Verbindung mit dem Hardy-Littlewoodschen Satz „aus II folgt $g(x) \to \infty$“ die sehr überraschende Tatsache sich ergibt: *Wenn* $\liminf_{x=\infty} g(x)$ *endlich ist, so ist* $\liminf_{x=\infty} g(x) \leqq 0$.

[1]) In der Voranzeige dieses Abschnitts, welche unter gleichem Titel in den Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 14 (1915), Records of Proceedings at Meetings, S. XV bis XVI, erschien — ich erfuhr ihre Existenz aus der oben genannten Arbeit der Herren Hardy und Littlewood und konnte mir inzwischen eine Abschrift verschaffen — war schon dasselbe Desideratum mit ähnlichen Worten formuliert. (16. 9. 1917.)