Über einen Satz von Tschebyschef.

Von

EDMUND LANDAU in Berlin.

§ 1.

Es bezeichne $f(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$, welche die Form $4n+3$ haben, $g(x)$ die Anzahl der Primzahlen $4n+1 \leqq x$. Dann ist nach einem schon von Dirichlet*) vermuteten, aber erst von Herrn de la Vallée Poussin**) bewiesenen Satze

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Diese Gleichung folgt nämlich unmittelbar aus Herrn de la Vallée Poussins***) Relationen

$$(1) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{2}.$$

Da

$$\lim_{x=\infty} \frac{Li(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

ist, wo $Li(x)$ den Integrallogarithmus von x bedeutet, lassen sich die Gleichungen (1) auch so schreiben:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\left(f(x) - \frac{1}{2}Li(x)\right) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\left(g(x) - \frac{1}{2}Li(x)\right) = 0.$$

---

*) „Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält“, Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1837, S. 45; Werke, Bd. 1, 1889, S. 315.

**) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers“, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, 1896, S. 281—362.

***) l. c., S. 360, Gleichung (13).

Kürzlich habe ich*) nachgewiesen, daß sogar für jedes m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(f(x)-\frac{1}{2}\,Li(x)\right)=0,\quad \lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(g(x)-\frac{1}{2}\,Li(x)\right)=0$$

ist. Hieraus folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(f(x)-g(x)\right)=0.$$

Die Differenz $f(x)-g(x)$ ist also für $x=\infty$ von geringerer Größenordnung als $f(x)$, als $g(x)$ und sogar als $\frac{x}{\log^m x}$, wo m irgend eine Konstante bezeichnet.

Über das Vorzeichen von $f(x)-g(x)$, sowie über die Frage nach einer unteren Schranke für die Größenordnung dieser Differenz liefern diese asymptotischen Resultate offenbar keinen Aufschluß.

In dieser Richtung liegt nun ein Satz, den Tschebyschef**) im Jahre 1853 ohne Beweis in folgendem Wortlaut veröffentlicht hat:

Si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n+1$, et que l'on divise ensuite cette différence par la quantité $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles, que ce quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra.

Tschebyschef spricht also in sehr klaren Worten folgenden Satz aus:

Wenn zwei positive Größen δ und x_0 gegeben sind, so gibt es oberhalb x_0 ein $x=x(\delta, x_0)$, *so daß die Ungleichung*

$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}}-1\right|<\delta \tag{2}$$

erfüllt ist.

Dieser Satz ist zuerst im Jahre 1891 von Herrn Phragmén***) bewiesen worden, mit Anwendung der Theorie der Funktionen complexen Argumentes und insbesondere eines funktionentheoretischen Hilfssatzes, den der Verfasser zu diesem Zweck entwickelt hat.

Dies ist zur Zeit der einzige Beweis des Tschebyschefschen Satzes. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, muß ich eine Reihe anderer

*) „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a, 1903, S. 532, Gleichung (48).

**) „Lettre de M. le professeur Tchébychev à M. Fuss, sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$", Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences, Bd. 11, St. Petersburg, S. 208; Œuvres, Bd. 1, 1899, S. 697.

***) „Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann", Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 48, S. 599—616.

Arbeiten besprechen, welche sich mit dem Gegenstand beschäftigen und vermeintliche Beweise des Tschebyschefschen Satzes enthalten.

I) Polignac*) hat im Jahre 1859 eine Untersuchung über die Verteilung der Primzahlen $4n+1$ und $4n+3$ veröffentlicht, in welcher er den Tschebyschefschen Satz zu beweisen glaubt. Er bildet richtig eine Identität, auf welche auch Tschebyschef im Briefe an Fuss anspielt; sie ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welche den früheren unabhängig entstandenen Untersuchungen von Tschebyschef und Polignac über die Verteilung der Primzahlen zugrunde liegt. Polignacs Schlußfolgerungen aus jener Identität sind jedoch heuristischer Natur und enthalten im übrigen nicht einmal dem Wortlaut nach das zu beweisende Resultat, welches Polignac nur in der unscharfen Form zitiert: „pour x très-grand, le premier terme de la différence des nombres premiers de la forme $4n+3$ et $4n+1$ est $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$".

II) Im Jahre 1896 hat Herr Cesàro**) eine Abhandlung über unseren Gegenstand veröffentlicht. Seine Schlüsse enthalten jedoch am Anfang eine auch beim heutigen Stande der Wissenschaft unausfüllbare Lücke. Der Verfasser setzt nämlich als selbstverständlich voraus, daß die unendliche Reihe

$$\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}-\cdots=\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}, \tag{3}$$

wo p alle ungeraden Primzahlen durchläuft, für reelle $s>\frac{1}{2}$ konvergiert. Tatsächlich weiß man über diese Reihe, welche offenbar für $\Re(s)>1$ konvergiert, nur noch durch Herrn Mertens***), daß sie für $s=1$ konvergiert, d. h. daß die Reihe

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\cdots \tag{4}$$

konvergent ist, und durch Herrn de la Vallée Poussin†), daß sie für alle s mit reellem Teil 1 konvergiert.

Übrigens ist Herrn Cesàro, wie er am Anfang††) bemerkt, bei der

*) „Nouvelles recherches sur les nombres premiers (suite)", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 49, S. 386—387.

**) „Sulla distribuzione dei numeri primi", Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Ser. 3, Bd. 2, S. 297 ff.

***) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874, S. 55—56.

†) Vergl. die auf S. 527, Anm. **) zitierte Arbeit, S. 361. Es folgt ohne weiteres aus dem dort mit 5° bezeichneten Satze.

††) l. c., S. 297.

Veröffentlichung seiner Arbeit die Tschebyschefsche Note aus dem Jahre 1853 unzugänglich gewesen; er hatte nur eine spätere Abhandlung*) von Tschebyschef gelesen, welche die obige präzise Formulierung des Satzes nicht enthält, sondern nur die sehr populäre Aussage: „Il y a une différence notable dans la répartition des nombres premiers, des deux formes $4n+3$, $4n+1$: la première forme en contient beaucoup plus que la seconde.“ Es ist — von der Lücke im Beweise ganz abgesehen — der in der Ungleichung (2) bestehende Tschebyschefsche Satz nicht in vollem Umfang in Herrn Cesàros Arbeit entwickelt. Herr Cesàro ist also im Irrtum, wenn er später**) unter genauer Wiedergabe der betreffenden Stelle aus Tschebyschefs Brief an Fuss meint, zu dem Satz in seiner Arbeit gelangt zu sein.

Da einmal von der Reihe (4)

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\cdots$$

die Rede war, benutze ich diese Gelegenheit zu einigen historischen Mitteilungen über dieselbe, welche mehrere verbreitete Irrtümer richtig stellen sollen. Schon Euler***) hatte mit dem Produkte

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}}$$

gerechnet, ohne dessen Konvergenz zu beweisen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ohne die Konvergenz der Reihe (4) zu beweisen. Dieser unendlichen Reihe widmete Euler — gleichfalls ohne Rücksicht auf die Konvergenzfrage — später eine besondere Abhandlung†). Merkwürdigerweise operiert auch Tschebyschef in einer Arbeit††) aus dem Jahre 1851 mit der Reihe (4), ohne ihre Konvergenz zu beweisen. Tatsächlich

*) „Sur une transformation de séries numériques“, Nouvelle correspondance mathématique, Bd. 4, 1878, S. 305 ff.

**) L'intermédiaire des mathématiciens, Bd. 7, 1900, S. 386—387.

***) „Introductio in analysin infinitorum“, Bd. 1, Lausanne, 1748, S. 241.

†) „De summa seriei ex numeris primis formatae $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}+\frac{1}{31}$ etc. ubi numeri primi formae $4n-1$ habent signum positivum, formae autem $4n+1$ signum negativum“, Opuscula analytica, Bd. 2, St. Petersburg, 1785, S. 240 ff.; commentationes arithmeticae collectae, Bd. 2, St. Petersburg, 1849, S. 116 ff.

††) „Note sur différentes séries“, Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 1, Bd. 16, S. 343—346; Œuvres, Bd. 1, S. 105—108.

begründet Tschebyschef an jener Stelle höchstens die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{s=1}\left(\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots\right), \tag{5}$$

wo s von rechts an 1 heranrückt, und er bestimmt diese Konstante numerisch auf mehrere Dezimalstellen genau*). Wenn die Konvergenz der Reihe (4) festgestellt ist, so ist ihr Wert tatsächlich gleich jener Zahl (5).

Nun ist ja, wie schon oben**) bemerkt, von Herrn Mertens die Konvergenz der Reihe (4) bewiesen worden, so daß alle hieraus früher gezogenen Schlüsse gerechtfertigt sind. Folgende Gründe lassen jedoch die Entscheidung der Frage nach dem wahren Konvergenzbereich der Reihe

$$\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}-\cdots, \tag{3}$$

insbesondere die etwaige Bestätigung der Vermutung ihrer Konvergenz für $s>\frac{1}{2}$, als in weiter Ferne liegend erscheinen. Wenn die Reihe für $s>\frac{1}{2}$ konvergiert, so konvergiert sie — als Dirichletsche Reihe — in allen Punkten der Halbebene $\Re(s)>\frac{1}{2}\cdot$ Dasselbe gilt alsdann auch von der unendlichen Reihe

$$\sum_p\left(-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}-\frac{1}{2p^{2s}}-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{3p^{3s}}-\frac{1}{4p^{4s}}-\cdots\right)=\sum_p\log\left(1-\frac{1}{\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}}\right),$$

da die Zusatzreihe

$$\sum_p\left(-\frac{1}{2p^{2s}}-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{3p^{3s}}-\cdots\right)$$

in jener Halbebene konvergiert. Also würde das Produkt

$$\prod_p\frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}}$$

für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ konvergieren und eine reguläre, nicht verschwindende analytische Funktion von s darstellen. Die für $\Re(s)>1$ gültige Gleichung

$$1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}} \tag{6}$$

*) Dieser Wert findet sich auch schon in der auf S. 530, Anm. †) zitierten Eulerschen Abhandlung auf S. 254 bezw. S. 125.

**) s. S. 529.

würde also für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ gelten und zeigen, daß die für $\Re(s) > 0$ konvergente unendliche Reihe in (6) in der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ nirgends verschwindet. Der etwaige Nachweis der Richtigkeit dieser Vermutung wäre ein analoges, also wohl ebenso schwieriges Problem wie die Entscheidung der zur Zeit noch offenen Frage, ob wirklich die Riemannsche Zetafunktion in der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ von 0 verschieden ist.

Herr Torelli glaubte neuerdings im Kap. 11 seiner großen Monographie*) über das Primzahlproblem den Beweis der Richtigkeit der Gleichung (6), also der Konvergenz des darin rechts auftretenden Produktes für alle reellen $s > 0$ erbracht zu haben. Er entwickelt nämlich dort vermeintlich allgemein für $s > 0$ die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \tag{7}$$

wo $\chi(n)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter modulo M ist**). Schon aus der Konvergenz des Produktes in (7) für alle $s > \frac{1}{2}$ würde die Konvergenz der Reihe

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \tag{8}$$

für $s > \frac{1}{2}$ folgen, also für $\Re(s) > \frac{1}{2}$, also die Richtigkeit der Gleichung (7) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ und das Nichtverschwinden der Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{9}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ ***). Jedoch enthält Herrn Torellis Beweisführung einen unheilbaren Fehlschluß†). Aus der Tatsache, daß eine gewisse Funktion $G(x)$ für jedes konstante m die Gleichung

---

*) „Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato", Atti della R. Accademia delle science fisiche e matematiche di Napoli, Ser. 2, Bd. 11, 1901.

**) Im vorliegenden Fall ist $M = 4$.

***) Dies bemerkt Herr Torelli nicht einmal und schließt (l. c., S. 158) aus (7) nur: „alle Nullstellen der Reihe (9), deren reeller Teil zwischen 0 und 1 liegt, sind nicht reell."

†) l. c., S. 157, Z. 9—10.

$$\lim_{x=\infty} (G(x+m) - G(x)) = 0$$

erfüllt, schließt nämlich der Verfasser, daß $\lim_{x=\infty} G(x)$ existiert.

Die irrtümliche Annahme, die Gleichung (7) sei für irgend ein $s < 1$ bewiesen, findet sich noch in einer kürzlich erschienenen Notiz von Herrn Pellet*). Die Schlüsse, welche derselbe aus (7) zieht, sind daher unzulässig.

Ich erwähne noch, daß ich im Schlußparagraphen meiner Arbeit**) über die arithmetische Progression den Nachweis geführt habe, daß die unendliche Reihe

$$\sum_p \frac{\chi(p) \log^m p}{p^s} \tag{10}$$

für jedes reelle m und jedes s mit dem reellen Teil 1 konvergiert. Wäre für irgend ein $s < 1$ die Konvergenz der Reihe (8) bekannt, so würde diese Reihe (8) für den in der Konvergenzhalbebene gelegenen Punkt $s = 1 + ti$ gliedweise differentiierbar sein; die Konvergenz von (10) wäre also für jedes ganzzahlige positive m, also für jedes reelle m selbstverständlich, und ich hätte einen überflüssigen analytischen Apparat aufgeboten. Aus diesem Grunde habe ich hier Wert darauf gelegt, die Unrichtigkeit aller bisherigen Begründungen der Konvergenz von (8) für irgend ein $s < 1$ zu konstatieren. Ich darf hinzufügen, daß ich den Herren Cesàro und Torelli von meinen Einwänden schon vor einiger Zeit Kenntnis gegeben habe, und daß sie die Berechtigung derselben anerkennen***).

III) Herr Torelli bemerkt in einer Note†) aus dem Jahre 1902, der Tschebyschefsche Satz über die Verteilung der Primzahlen $4n + 1$ und $4n + 3$ folge als Korollar aus Herrn Poincarés††) Untersuchungen über die komplexen Primzahlen $a + bi$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Herr Poincaré beweist nur diejenigen Sätze, die man später zu der Folgerung

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

---

*) Sur un théorème de Lejeune-Dirichlet", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 136, 1903, S. 1235—1236.

**) l. c. (vergl. S. 528, Anm. *)), S. 533—535.

***) Vergl. auch die entsprechende Mitteilung Herrn Torellis am Ende der Rezension von Herrn Vecchi über sein Buch, Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, Bd. 6, 1903, S. 48.

†) „Sur quelques théorèmes de M. Poincaré sur les idéaux premiers", Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Bd. 16, S. 100.

††) „Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 8, 1892, S. 25 ff.

verschärft hat und deren Wortlaut symmetrisch in den beiden Primzahlarten $4n+1$ und $4n+3$ ist, da nur die Glieder höchster Größenordnung betrachtet werden.

Im folgenden beabsichtige ich nun einen neuen Beweis des Tschebyschefschen Satzes mitzuteilen, welcher einfacher ist als der Phragménsche. Ich beginne damit, in § 2 einen allgemeinen Satz über Dirichletsche Reihen zu entwickeln, der auch an sich von Interesse erscheint. In § 3 beweise ich dann unter Anwendung dieses Hilfssatzes den Tschebyschefschen Satz. In § 4 ziehe ich einige andere Folgerungen aus den analytischen Hilfsbetrachtungen.

§ 2.

Wenn eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{11}$$

mit endlichem Konvergenzradius R vorgelegt ist, so folgt bekanntlich ohne spezielle Voraussetzungen aus der Tatsache, daß die Reihe in einem bestimmten Punkte auf dem Konvergenzkreise konvergiert oder divergiert, nichts über die Frage, ob jener Punkt ein regulärer oder singulärer Punkt der durch die Reihe definierten analytischen Funktion ist. Es kann sich eben in beiden Fällen beides ereignen. Manchmal jedoch kann man aus den Koeffizienten der Reihe Folgerungen über die analytische Natur eines Randpunktes ziehen; in dieser Richtung liegen ja zahlreiche Arbeiten der neueren Zeit. Einer der einfachsten Sätze dieser Art lautet:

Sind alle Koeffizienten von einer gewissen Stelle an positiv, ist also

$$a_n > 0 \quad \text{für} \quad n \geqq m,$$

so ist der positive Punkt $x = R$ des Konvergenzkreises sicher singulär, mag die Reihe dort konvergieren oder nicht.

Dieser Satz wurde trotz seiner Einfachheit zuerst im Jahre 1893 von Herrn Vivanti*) ausgesprochen. Ein Beweis wurde etwa gleichzeitig von Herrn Pringsheim**) veröffentlicht; derselbe lautet folgendermaßen. $\xi = re^{\varphi i}$ sei irgend ein Punkt im Konvergenzkreise. Dann ist für $n \geqq m$

$$\left|\frac{1}{n!}\mathfrak{P}^{(n)}(\xi)\right| = \left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n} a_\nu \xi^{\nu-n}\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n} a_\nu r^{\nu-n}.$$

*) „Sulle serie di potenze“, Rivista di matematica, Bd. 3, S. 112.

**) „Über Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwickelung besitzen“, Mathematische Annalen, Bd. 44, 1894, S. 42.

Die Koeffizienten der in der Umgebung von $\xi = re^{\varphi i}$ für konstantes r $\left(\text{z. B. } r = \frac{R}{2}\right)$ gültigen Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \mathfrak{P}^{(n)}(\xi)\,(x-\xi)^n \tag{12}$$

erreichen also von dem Index $n = m$ ab durchweg ihre Maximalwerte, wenn gerade $\varphi = 0$, $\xi = r$ ist. Daher ist der Konvergenzkreis der Reihe (12) für keine Stelle ξ mit dem absoluten Betrage r kleiner als für $\xi = r$ selbst; da auf dem Konvergenzkreise $|x| = R$ der ursprünglichen Reihe mindestens eine singuläre Stelle liegen muß, da also mindestens einer der Konvergenzkreise von (12) für $\xi = re^{\varphi i}$ gerade den Radius $R - r$ haben muß, so muß dies sicher für den auf $\xi = r$ bezüglichen der Fall sein, d. h. $x = R$ ist eine singuläre Stelle.

Derselbe Beweis steht auch in den Büchern von Herrn Hadamard*) und Herrn Vivanti.**)

Ein anderer Beweis des Satzes lautet folgendermaßen: Es sei beständig $a_n > 0$; dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da es sich — unter der Voraussetzung $a_n > 0$ für $n \geqq m$ — stets durch Addition einer ganzen rationalen Funktion erreichen läßt. Gesetzt, der Punkt $x = R$ wäre regulär, dann hätte die in der Umgebung von $x = r$ $\left(0 < r < R,\ \text{z. B. } r = \frac{R}{2}\right)$ gebildete Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu r^{\nu-n}(x-r)^n \tag{13}$$

einen Konvergenzradius $\varrho > R - r$. Es sei $R + p$ irgend eine Zahl zwischen R und $r + \varrho$, also $0 < p < r + \varrho - R$. Dann wäre die Reihe (13) für $x = R + p$ konvergent. Diese Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu r^{\nu-n}(R+p-r)^n$$

ist eine Doppelreihe mit positiven Gliedern, läßt sich also beliebig ordnen. Es wäre also die durch Vertauschung der Summationsfolge entstehende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu \sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} \left(\frac{R+p-r}{r}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu \left(1 + \frac{R+p-r}{r}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (R+p)^\nu$$

---

*) „La série de Taylor et son prolongement analytique", Paris 1901, S 21.

**) „Teoria delle funzioni analitiche", Mailand 1901, S. 369—370; deutsche Ausgabe von Gutzmer (Leipzig, 1906), S. 399.

konvergent, d. h. die Potenzreihe (11) würde in dem außerhalb ihres Konvergenzkreises gelegenen Punkte $R+p$ konvergieren.

Dieser Beweis hat vor dem ersten den Vorzug, daß er den Satz von der Existenz eines singulären Punktes auf dem Rande des Konvergenzkreises einer Potenzreihe nicht voraussetzt; aber schließlich ist es ja gleichgültig, ob man den einen oder anderen Weg einschlägt.

Ganz anders verhält es sich, wenn man die analogen Fragen für Dirichletsche Reihen untersucht, d. h. für Reihen von der Form

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

oder allgemeiner

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ eine monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Größen ist. Bekanntlich ist das Konvergenzgebiet einer solchen Reihe — von den beiden extremen Fällen abgesehen, daß die Reihe nirgends oder überall konvergiert — eine Halbebene, d. h. es gibt eine bestimmte reelle Zahl σ, so daß die Reihe für $\Re(s) < \sigma$ divergiert, dagegen für $\Re(s) > \sigma$ konvergiert und (wegen der gleichmäßigen Konvergenz in einer gewissen Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene) eine analytische Funktion darstellt. Das Verhalten auf der „Grenzgeraden" bleibt ebenso unbestimmt, wie das Verhalten der Potenzreihen (die ja für $\lambda_n = n$ einen Spezialfall der Dirichletschen Reihen darstellen) auf dem Rande des Konvergenzkreises. Nun ist aber bekanntlich auf der Grenzgeraden $\Re(s) = \sigma$ einer Dirichletschen Reihe nicht notwendig eine singuläre Stelle der durch sie in der Halbebene $\Re(s) > \sigma$ definierten analytischen Funktion gelegen; z. B. hat die Dirichletsche Reihe

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

die Grenzgerade $\Re(s) = 0$ und stellt doch eine ganze transzendente Funktion, nämlich $\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)$, dar. Wenn also für Dirichletsche Reihen ein analoger Satz zu dem obigen Satze über Potenzreihen vorhanden ist, so würde sicher die erste der beiden angeführten Beweismethoden versagen. Tatsächlich ist aber, wie nunmehr gezeigt werden soll, die zweite Methode imstande, den Satz zu beweisen:

Wenn alle Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe von einer gewissen Stelle an positiv sind, so ist der reelle Punkt ihrer Grenzgeraden eine singuläre Stelle der Funktion.

Zum Beweise darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß alle Koeffizienten a_n der gegebenen Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{14}$$

positiv sind, da man anderenfalls (wenn nur für $n \geqq m$ $a_n > 0$ ist) dies durch Addition einer ganzen transzendenten Funktion

$$\sum_{n=1}^{m-1} b_n e^{-\lambda_n s}$$

stets erreichen kann. Gesetzt nun, es sei die reelle Stelle σ der Grenzgeraden regulär, so würde, wenn σ_1 irgend eine Zahl $> \sigma$ ist (z. B. $\sigma_1 = \sigma + 1$) die Potenzreihe in der Umgebung von $s = \sigma_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(\sigma_1)(s-\sigma_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} (-\lambda_\nu)^n (s-\sigma_1)^n \tag{15}$$

einen Konvergenzradius $\varrho > \sigma_1 - \sigma$ haben. Es sei $\sigma - p$ irgend eine Zahl zwischen $\sigma_1 - \varrho$ und σ, also $0 < p < \varrho - (\sigma_1 - \sigma)$. Dann konvergiert die Reihe (15) für $s = \sigma - p$; d. h. die unendliche Doppelreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} \lambda_\nu^n (\sigma_1 - \sigma + p)^n$$

mit positiven Gliedern konvergiert, also auch die durch Vertauschung der Summationsfolge entstehende Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_\nu(\sigma_1 - \sigma + p))^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} e^{\lambda_\nu(\sigma_1 - \sigma + p)}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu(\sigma - p)};$$

d. h. die gegebene Dirichlet'sche Reihe (14) würde in dem links von der Grenzgeraden gelegenen Punkte $s = \sigma - p$ konvergieren.

Der hier bewiesene Satz ist, so viel ich weiß, bisher nirgends ausgesprochen oder angewendet worden. Es wird sich im folgenden zeigen, daß er manche bekannte Untersuchungen wesentlich abzukürzen gestattet. Dabei wird namentlich folgende Fassung angewendet werden:

Wenn von einer Dirichletschen Reihe, deren Koeffizienten von einer gewissen Stelle an positiv sind, bekannt ist, daß sie mindestens für $\Re(s) > \sigma$ konvergiert, und daß die durch sie dargestellte Funktion auf der Strecke $\sigma_0 < s \leqq \sigma$ sich regulär verhält (wo σ_0 irgend eine reelle Zahl $< \sigma$ ist), so konvergiert die Reihe mindestens in der Halbebene $\Re(s) > \sigma_0$.

Dies folgt tatsächlich aus dem Satze. Denn nach ihm kann die Abszisse α der Grenzgeraden der Reihe nicht $> \sigma_0$ sein, da sonst α eine singuläre Stelle der Funktion wäre; α ist also $-\infty$ oder endlich und $\leqq \sigma_0$, d. h. die Reihe konvergiert (mindestens) für $\Re(s) > \sigma_0$ und stellt in dieser Halbebene eine reguläre Funktion dar.

§ 3.

Es mögen $F_1(s)$ und $F_2(s)$ die Dirichletschen Reihen

$$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots,$$

$$F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \cdots$$

bezeichnen. Die Grenzgerade der ersteren ist $\Re(s) = 1$, der letzteren $\Re(s) = 0$; ferner ist $F_2(s)$ für $0 < s \leqq 1$ von Null verschieden, da die Glieder monoton abnehmen und abwechselndes Vorzeichen besitzen. Ferner ist für $\Re(s) > 1$

(16) $$F_1(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

(17) $$F_2(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}},$$

wo p alle *ungeraden* Primzahlen durchläuft. Aus (17) folgt, daß für $\Re(s) > 1$

$$\log F_2(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}\right) = \sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}}$$

$$+ \sum_p \left(\frac{1}{3}\,\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{3s}} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{p^{4s}} + \cdots\right)$$

ist. Die letzte Summe ist in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{3}$ gleichmäßig konvergent, stellt also eine in dieser Halbebene reguläre Funktion dar. Im folgenden mögen in fortlaufender Nummerierung unter $R_1(s)$, $R_2(s)$, $\cdots$ Funktionen verstanden werden, welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ und für reelle $s \geqq \frac{1}{2}$ regulär sind. Dann ist also für $\Re(s) > 1$

$$\log F_2(s) = \sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + R_1(s),$$

also, da nach dem oben Bemerkten

$$\log F_2(s) = R_2(s)$$

ist,

(18) $$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + R_3(s).$$

Nun folgt aus (16)

$$\log F_1(2s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \sum_p\left(\frac{1}{2}\frac{1}{p^{4s}}+\cdots\right)$$
$$= \sum_p \frac{1}{p^{2s}} + R_4(s);$$

da

$$F_1(s) = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

bekanntlich für $s=1$ einen Pol erster Ordnung besitzt, ist

$$\log F_1(2s) = -\log\left(s-\frac{1}{2}\right) + R_5(s),$$

also

$$\sum_p \frac{1}{p^{2s}} = -\log\left(s-\frac{1}{2}\right) + R_6(s);$$

dies ergibt, in (18) eingesetzt,

(19) $$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = \frac{1}{2}\log\left(s-\frac{1}{2}\right) + R_7(s).$$

Die Gleichung (19) zeigt, daß $s=\frac{1}{2}$ eine singuläre Stelle der durch die Dirichletsche Reihe

(20) $$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}$$

definierten Funktion ist; die Abszisse der Grenzgeraden der Reihe (20) ist also zwischen $\frac{1}{2}$ (inkl.) und 1 (inkl.) gelegen; sie läßt sich zurzeit nicht bestimmen*), und die Kenntnis ihres Wertes ist, wie sich zeigen wird, erfreulicherweise für den vorliegenden Zweck unerheblich.

Ich setze nun

$$\varphi(x) = f(x) - g(x),$$

wo $f(x)$ und $g(x)$ die auf S. 527 angegebenen Bedeutungen haben; $\varphi(x)$

*) Vergl. S. 531—532.

ist also der Überschuß der Anzahl der Primzahlen $4m+3 \leqq x$ über die Anzahl der Primzahlen $4m+1 \leqq x$. Es ist offenbar

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) \begin{cases} = 1 \text{ für Primzahlen } n = 4m+3, \\ = -1 \text{ für Primzahlen } n = 4m+1, \\ = 0 \text{ für andere Zahlen,} \end{cases}$$

und es ergibt sich für $\Re(s) > 1$

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n^s}.$$

Durch partielle Summation erhält man

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{x} \varphi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{\varphi(x)}{(x+1)^s}$$

wegen

$$|\varphi(x)| < x$$

ist für $\Re(s) > 1$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{(x+1)^s} = 0,$$

also

$$(21) \qquad \sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right).$$

Nun ist

$$(22) \qquad \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = \frac{s}{n^{s+1}} - s(s+1)\int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}};$$

es konvergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}}$$

für $\Re(s) > 1$; außerdem ist wegen

$$\left| s(s+1)\int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}} \right| \leqq |s| \cdot |s+1| \cdot \int_n^{n+1} du \int_n^{n+1} \frac{dv}{v^{\Re(s)+2}} < \frac{|s| \cdot |s+1|}{n^{\Re(s)+2}}$$

die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n)\, s(s+1)\int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}}$$

in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s) > 0$ gleichmäßig konvergent; aus (21) und (22) ergibt sich also

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -s \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} + R_8(s),$$

also in Verbindung mit (19)

$$(23) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = -\frac{1}{2s} \log\left(s - \frac{1}{2}\right) + R_9(s).$$

Ferner ist für $\Re(s) > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}{n^{s+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{s+\frac{1}{2}} \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \log n} - \int_1^s \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{s+\frac{1}{2}}} ds$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \log n} - \int_1^s \zeta\left(s + \frac{1}{2}\right) ds + s - 1,$$

also, da $\zeta(s)$ im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 hat,

$$(24) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}{n^{s+1}} = -\log\left(s - \frac{1}{2}\right) + R_{10}(s).$$

(24) werde von (23) subtrahiert:

$$(25) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n) - \frac{\sqrt{n}}{\log n}}{n^{s+1}} = \left(1 - \frac{1}{2s}\right) \log\left(s - \frac{1}{2}\right) + R_{11}(s)$$

$$= \frac{1}{s}\left(s - \frac{1}{2}\right) \log\left(s - \frac{1}{2}\right) + R_{11}(s).$$

Da bei Annäherung von rechts

$$\lim_{s=\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) \log\left(s - \frac{1}{2}\right) = 0$$

ist, so folgt aus (25), wenn

$$\varphi(n) - \frac{\sqrt{n}}{\log n} = \psi(n)$$

gesetzt wird: die durch die mindestens für $\Re(s) > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$(26) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}}$$

definierte analytische Funktion $\Psi(s)$ ist für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär und hat in $s = \frac{1}{2}$ eine singuläre Stelle; jedoch nähert sich bei Annäherung von rechts an diesen Punkt die Funktion einem endlichen Grenzwert.

Der zu beweisende Tschebyschefsche Satz sagt nun aus: wenn δ eine beliebig gegebene positive Größe ist, so ist unendlich oft

$$\left|\frac{\varphi(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}} - 1\right| < \delta,$$

also

$$-\delta \frac{\sqrt{n}}{\log n} < \varphi(n) - \frac{\sqrt{n}}{\log n} < \delta \frac{\sqrt{n}}{\log n},$$

$$-\delta \frac{\sqrt{n}}{\log n} < \psi(n) < \delta \frac{\sqrt{n}}{\log n}. \tag{27}$$

Dazu braucht nur gezeigt zu werden, daß weder für alle n von irgend einer Stelle an

$$\psi(n) \geqq \delta \frac{\sqrt{n}}{\log n} \tag{28}$$

noch für alle hinreichend großen n

$$\psi(n) \leqq -\delta \frac{\sqrt{n}}{\log n} \tag{29}$$

sein kann. Denn, wenn dies bewiesen ist, schließt man weiter so: wäre (27) nicht unendlich oft erfüllt, so wäre für alle n von einer gewissen Stelle an der Quotient $\psi(n) : \frac{\sqrt{n}}{\log n}$ außerhalb des Intervalles von $-\delta$ (exkl.) bis δ (exkl.) gelegen. Wenn nun aber das Argument sich um 1 vermehrt, so ändert sich dieser Quotient um eine Größe, welche für $n = \infty$ den Grenzwert 0 hat, also für alle hinreichend großen n kleiner als 2δ ist; es ist nämlich

$$\varphi(n) < n, \quad \varphi(n) - \varphi(n-1) = 1, \quad 0 \text{ oder } -1$$

und folglich

$$\left|\frac{\psi(n+1)}{\frac{\sqrt{n+1}}{\log(n+1)}} - \frac{\psi(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}\right| = \left|\frac{\varphi(n+1)}{\frac{\sqrt{n+1}}{\log(n+1)}} - \frac{\varphi(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}\right|$$

$$= \left|(\varphi(n+1) - \varphi(n)) \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + \varphi(n)\left(\frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} - \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right|$$

$$< \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + n\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{\log u}{2u\sqrt{u}}\right) du\right|$$

$$< \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + n\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{\log(n+1)}{2n\sqrt{n}}\right) = \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\log(n+1)}{2\sqrt{n}}.$$

Also wäre unter der Annahme, daß der Tschebyschefsche Satz falsch ist, entweder (28) oder (29) von einer gewissen Stelle an erfüllt.

Gesetzt nun, die Ungleichung (28) sei für alle $n \geqq m$ erfüllt. Dann wären alle Koeffizienten der Dirichletschen Reihe (26) von einer gewissen Stelle an positiv; die Anwendung des Satzes in § 2 ergibt also, daß die Abszisse σ der Grenzgeraden von (26) nicht $> \frac{1}{2}$ sein könnte. Denn nach dem auf S. 541 Gefundenen ist die durch (26) definierte Funktion für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär. Aus $\sigma \leqq \frac{1}{2}$ würde $\sigma = \frac{1}{2}$ folgen, da ja die durch die Reihe definierte Funktion im Punkte $\frac{1}{2}$ singulär ist. In diesem Punkte divergiert die Reihe (26) und zwar nach $+\infty$, da für $n \geqq m$ ihr allgemeines Glied

$$\frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \geqq \frac{\delta}{n \log n}$$

wäre. Die nunmehr für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} \tag{26}$$

dargestellte Funktion $\Psi(s)$ wächst infolgedessen offenbar bei Annäherung von rechts an $s = \frac{1}{2}$ über alle Grenzen. Denn nach Annahme von g gibt es ein $\nu = \nu(g)$, so daß $\nu > m$ und

$$\sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}} > 2g$$

ist. Da nun

$$\lim_{s=\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} = \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wäre für $\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} + \varepsilon$ (wo ε nach Annahme von g passend bestimmbar ist)

$$\left| \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} - \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \right| < g,$$

also

$$\sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} > g$$

und a fortiori

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} > g.$$

$\Psi(s)$ wächst also bei Annäherung an $s = \frac{1}{2}$ von rechts über alle Grenzen;

dies steht aber im Widerspruch damit, daß nach S. 541 $\Psi(s)$ bei jener Annäherung gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Genau ebenso ergibt sich, daß die Ungleichung (29) nicht für alle hinreichend großen n erfüllt sein kann, und damit ist der Tschebyschefsche Satz bewiesen.

Offenbar folgt ebenso, daß unendlich oft sogar

$$\left|\frac{f(n)-g(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}-1\right|<\frac{\delta}{\log\log n}$$

sein muß; denn die Annahme

$$\psi(n)\geqq\frac{\delta\sqrt{n}}{\log n\log\log n}$$

führt wegen der Divergenz von

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log\log n}$$

zu demselben Widerspruch wie oben (28).

§ 4.

Es sei hier noch eine andere Anwendung des Hilfssatzes in § 2 angegeben. Es vereinfachen sich durch ihn die Untersuchungen, welche Herr Erhard Schmidt*) über die Verteilung der Primzahlen angestellt hat; es wird nämlich die Anwendung eines Satzes von Herrn von Koch**) und damit der tieferen Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion entbehrlich. Dieser von Kochsche Satz lautet:

Unter der Annahme, daß die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ sämtlich den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, ist für $x>2$

$$\left|F(x)-\int_2^x\frac{dy}{\log y}\right|<\text{Const.}\sqrt{x}\log x,$$

wo $F(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet.

*) „Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze", Mathematische Annalen, Bd. 57, 1903, S. 195—204. Herrn Schmidts Sätze verschärfen die ähnlich lautenden Ungleichungen, zu denen vordem schon Herr Phragmén gelangt war, vergl. dessen auf S. 528, Anm. ***) zitierte Abhandlung und seine Arbeit: „Sur une loi de symmétrie relative à certaines formules asymptotiques", Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Bd. 58, 1901, S. 189—202.

**) „Sur la distribution des nombres premiers", Acta mathematica, Bd. 24, 1901, S. 182.

Herr Schmidt beweist nun den Satz*):

Wenn alle komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ *den reellen Teil* $\frac{1}{2}$ *haben***), *so ist oberhalb jeder Schranke die Ungleichung*

$$(30)\qquad f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} < -\frac{1}{29}\,\frac{\sqrt{x}}{\log x}$$

erfüllbar, wo $f(x)$ *durch die Gleichung*

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

definiert ist.

Um dies zu beweisen, setzt er

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n},$$

versteht unter n_1 bezw. n_2 die Zahlen, für welche $\varphi(n) \geqq 0$ bezw. $\varphi(n) < 0$ ist, und entwickelt zunächst die mindestens für $\Re(s) > 1$ gültige Gleichung***)

$$(31)\qquad \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1 = \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} \log n_2 - A'(s)$$
$$+ \frac{1}{s^2}\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds - \frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right),$$

wo a irgend eine reelle Zahl > 1 ist und $A'(s)$ eine für $\Re(s) > 0$ reguläre Funktion bezeichnet. Da $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)$ sich im Punkte $s = 1$ regulär verhält und da bekanntlich für $0 < s < 1$ $\zeta(s) \neq 0$ ist, läßt sich (31) kurz so schreiben:

$$(32)\qquad \sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1 = \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} \log n_2 + G(s),$$

wo $G(s)$ für reelle $s > 0$, also insbesondere für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär ist.

---

*) Ich zitiere hier einen Teil des bei Herrn Schmidt mit I. bezeichneten Satzes.

**) Für den Fall, daß $\zeta(s)$ Nullstellen mit reellem Teil $> \frac{1}{2}$ besitzt, beweist Herr Schmidt die Richtigkeit der Ungleichung (30) wesentlich elementarer. Übrigens mache ich in der Beweisanordnung des Textes keinen Gebrauch von jener Annahme über die Nullstellen. Vielmehr wird sich aus der — als unrichtig nachzuweisenden — Annahme (33) von selbst ergeben, daß alsdann $\zeta(s)$ für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ von Null verschieden wäre.

***) l. c., S. 200, Gleichung (7).

Herr Schmidt nimmt nun — um daraus einen Widerspruch herzuleiten — an, daß für alle hinreichend großen x

$$(33)\qquad -\varphi(n_2) < c\frac{\sqrt{n_2}}{\log n_2}$$

ist, wo c eine positive Konstante bezeichnet. Daraus folgt die Konvergenz der Summe auf der rechten Seite von (31) und (32) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Um nun schließen zu können, daß auch die Summe auf der linken Seite von (31) und (32) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergiert, und dann gewisse Grenzübergänge gegen die Gerade $\Re(s) = \frac{1}{2}$ ausführen zu dürfen, wendet Herr Schmidt die aus dem von Kochschen Satze folgende Relation

$$\varphi(n_1) < \text{Const.} \sqrt{n_1}\log n_1$$

an. Tatsächlich kann man aber mit alleiniger Anwendung des Hilfssatzes in § 2 folgendermaßen schließen. Die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1$$

mit positiven Koeffizienten definierte Funktion ist für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär; also konvergiert diese Dirichletsche Reihe für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Jetzt kann der Beweis des Satzes auf S. 545 weitergehen wie bei Herrn Schmidt.

Analog zu dem Satz in § 2 lassen sich auch die analytischen Hilfssätze, welche Herr Phragmén a. a. O.*) entwickelt, beweisen, und zwar so, daß ein Teil der Voraussetzungen fallen gelassen wird. Dadurch läßt sich z. B. der Phragménsche Beweis des Tschebyschefschen Satzes so darstellen, daß der (a. a. O. unter Benutzung der Funktionalgleichung zwischen den Argumenten s und $1-s$ geführte) Nachweis der Ungleichungen

$$\zeta(s) \neq 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \neq 0$$

für den Kreis $|s-1| \leqq 1$ entbehrlich wird.

Jene Modifikation sei zunächst bei dem ersten der Phragménschen Sätze ausgeführt:

Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion der reellen Variabeln x, α eine Konstante $\geqq 1$; es konvergiere das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$$

*) S. seine auf S. 528, Anm. ***) zitierte Abhandlung und auch seine Note „Sur la distribution des nombres premiers", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris. Bd. 114, 1892, S. 337—340.

für $\mathfrak{R}(s) > 1$, *und es sei die durch das Integral dargestellte Funktion an der Stelle* $s = 1$ *regulär und lasse sich in eine Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$ *entwickeln, deren Konvergenzradius* > 1 *ist; dann kann nicht für alle* x *von einer gewissen Stelle an*

$$\varphi(x) > \delta$$

sein, wo δ *eine positive Konstante ist.*

Der folgende Beweis dieses Satzes setzt nicht voraus, daß die Funktion für $|s-1| \leqq 1$ regulär ist, sondern nur, daß sie auf dem Stück der reellen Achse $0 \leqq s \leqq 1$ regulär ist.

Gesetzt, es sei von einer gewissen Stelle an (für alle $x \geqq x_0$)

$$\varphi(x) > \delta;$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $x_0 = \alpha$ angenommen werden, da

$$\int_{\alpha}^{x_0} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$$

eine ganze transzendente Funktion ist.

Das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-1}\, dx$$

divergiert, da der Integrand $> \delta x^{-1}$ ist. Da nun für jedes $x > \alpha$ der Integrand $\varphi(x)\, x^{-s-1}$ mit abnehmendem reellem s zunimmt, so gibt es eine ganz bestimmte Zahl β zwischen 0 (inkl.) und 1 (inkl.) derart, daß das Integral

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx \tag{34}$$

für $s < \beta$ divergiert, für $s > \beta$ konvergiert.*) In der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > \beta$ ist wegen

$$|\varphi(x)\, x^{-s-1}| \leqq \varphi(x)\, x^{-\mathfrak{R}(s)-1}$$

sicher das Integral konvergent und zwar gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jeder Stelle; (34) stellt also für $\mathfrak{R}(s) > \beta$ eine reguläre analytische Funktion dar. Da $0 \leqq \beta \leqq 1$ ist, ist nach Voraussetzung die für $\mathfrak{R}(s) > 1$ durch das Integral (34) definierte Funktion im Punkte β regulär.

---

*) Bekanntlich läßt sich, auch ohne die Annahme, daß $\varphi(x)$ konstantes Vorzeichen besitzt, beweisen, daß der Konvergenzbereich des Integrals $\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$ eine Halbebene ist; aus der Konvergenz für s_0 folgt nämlich die Konvergenz für jedes s_1, das die Ungleichung $\mathfrak{R}(s_1) > \mathfrak{R}(s_0)$ erfüllt.

Es sei γ irgend eine Zahl $> \beta$ (z. B. $\gamma = 2$). Die Taylorsche Reihe in der Umgebung der Stelle γ ist, da Differentiation unter dem Integral zeichen gestattet ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (s-\gamma)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(\gamma)(s-\gamma)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x) \log^n x \, x^{-\gamma-1} dx \, (s-\gamma)^n,$$

und ihr Konvergenzradius ϱ wäre $> \gamma - \beta$. Es sei $\beta - p$ eine Zahl zwischen $\gamma - \varrho$ und β, also $0 < p < \varrho - (\gamma - \beta)$. Dann wäre

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\beta - p - \gamma)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x) \log^n x \, x^{-\gamma-1} dx \, (p + \gamma - \beta)^n$$

konvergent, also auch, da alle Elemente positiv sind, das durch Vertauschung der Summation und Integration entstehende Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x) x^{-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \log^n x \, (p+\gamma-\beta)^n dx = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x) x^{-\gamma-1} e^{\log x (p+\gamma-\beta)} dx$$
$$= \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x) x^{-(\beta-p)-1} dx;$$

d. h. das Integral (34) würde für $s = \beta - p$ konvergieren, und β wäre gar nicht der Grenzpunkt der Konvergenz auf der reellen Achse. Also führt die Annahme $\varphi(x) > \delta$ (für alle $x \geqq x_0$) zu einem Widerspruch.

Allgemein gesprochen, geht aus diesen Entwickelungen folgende Tatsache hervor:

Es erfülle eine Funktion $\varphi(x)$ für $x \geqq x_0$ (x_0 wird $\geqq 1$ angenommen) die Ungleichung

$$\varphi(x) \geqq 0;$$

es sei das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

weder für alle reellen s, noch für kein reelles s konvergent, es gebe also ein bestimmtes β derart, daß das Integral für $s < \beta$ divergiert, für $s > \beta$ konvergiert. Dann ist $s = \beta$ eine singuläre Stelle der in der Halbebene $\Re(s) > \beta$ durch das Integral definierten analytischen Funktion.

Diese Tatsache führt auch mit Leichtigkeit zu einer Verschärfung des von Herrn Phragmén*) kürzlich bewiesenen Satzes:

*) Vergl. die auf S. 544, Anm. *) zitierte Arbeit.

Es sei $x_0 \geqq 1$, $\varphi(x)$ *eine reelle Funktion von* x, *und es konvergiere das Integral*

$$\int_{x_0}^{\infty} |\varphi(x)|\, x^{-s-1}\, dx \tag{35}$$

für $s > s_0$; *die alsdann für* $\Re(s) > s_0$ *durch das Integral*

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx \tag{36}$$

definierte Funktion $\Phi(s)$ *sei im Kreise* $|s - s_0| < \varrho$ *regulär. Es sei* α *eine reelle Zahl* $> s_0 - \varrho$, k *eine ganze Zahl* $\left(\gtreqless 0\right)$ *und es werde zur Abkürzung*

$$\{u\} = \begin{cases} u & \textit{für } u \geqq 0, \\ 0 & \textit{für } u \leqq 0 \end{cases}$$

gesetzt; dann sind die Integrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\}\, x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k}\, dx \tag{37}$$

und

$$\int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\}\, x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k}\, dx \tag{38}$$

entweder beide konvergent oder beide divergent.

Die folgende Beweisanordnung setzt nur voraus, daß die Funktion $\Phi(s)$ auf der geradlinigen Strecke $s_0 \geqq s > s_0 - \varrho$ regulär ist, nicht, daß sie im ganzen Kreise $|s - s_0| < \varrho$ regulär ist.

Es sei etwa das Integral (37) für ein spezielles Wertepaar α, k konvergent; dann soll bewiesen werden, daß (38) konvergiert.

Durch k-malige Integration bezw. Differentiation des Integrals (36) ergibt sich, daß das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

in der Halbebene $\Re(s) > s_0$ eine reguläre Funktion $\Psi(s)$ darstellt; dieselbe ist zufolge der Voraussetzung längs der Strecke $s_0 \geqq s \geqq \alpha$ fortsetzbar.*) Das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

stellt wegen der Konvergenz von (35) für $\Re(s) > s_0$ gleichfalls eine reguläre Funktion dar, die wegen der Konvergenz von (37) für $s > \alpha$ regulär ist.

---

*) Falls $\alpha = s_0$ ist, heißt dies, daß die Funktion im Punkte s_0 regulär ist.

Da nun

$$\{-\varphi(x)\} = \{\varphi(x)\} - \varphi(x)$$

ist, so folgt aus dem vorigen: die für $\Re(s) > s_0$ durch das Integral

$$(39) \qquad \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

definierte Funktion ist für reelle $s > \alpha$ regulär. Nach dem Satze auf S. 548 ist also der Grenzpunkt β der Konvergenz für das Integral (39) nicht größer als α, also entweder $-\infty$ oder endlich und $\leqq \alpha$. Falls $\beta = -\infty$ oder $\beta < \alpha$ ist, so ist (39) für $s = \alpha$ konvergent und die Behauptung ist bewiesen. Falls $\beta = \alpha$ ist, muß (39) auch für $s = \alpha$ konvergieren. Denn sonst würde das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\}\, x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

gegen $+\infty$ divergieren; in der für $s > \alpha$ gültigen Gleichung

$$\Psi(s) = \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx - \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

würde also bei Abnahme von s zu α das erste Integral gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren und das zweite gegen $+\infty$ divergieren, in Widerspruch damit, daß die Funktion $\Psi(s)$ im Punkte α regulär ist, also bei jeder Annäherung an diesen Punkt einen Grenzwert besitzt.

Berlin, den 6. Juni 1905.