Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 121.

Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de RIEMANN.

Par E. PHRAGMÉN.

[Présenté le 14 octobre 1891 par M. MITTAG-LEFFLER.]

Depuis la publication du célèbre mémoire *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (RIEMANN's Werke, p. 136), on a beaucoup discuté sur les points que RIEMANN y avait laissés obscurs. Mais les difficultés qu'on rencontre dans ces recherches sont immenses, à ce qu'il semble. Du moins, si on fait abstraction de la démonstration annoncée par M. STIELTJES du théorème fondamental que les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont toutes réelles,[1]) ce cont très peu des questions soulevées par le mémoire de RIEMANN qu'on a réussi à éclaircir jusqu' à présent. En particulier, on n'a pas encore publié de démonstration rigoureuse du fait important, s'il y a là un fait, que la différence du logarithme intégral et de la fonction $f(x)$ de RIEMANN finit par s'annuler relativement à la fonction $f(x)$ elle-même.

Peut-être cette démonstration ne se fera-t-elle pas attendre trop longtemps, l'attention des géomètres ayant été dirigée de ce côté par les questions de concours proposées par deux illustres Académies.[2]) Quoi qu'il en sera, voici en attendant un résultat

[1]) Comptes rendus, t. 101, p. 153.

[2]) L'Académie des sciences de l'Institut de France a formulé en ces termes le sujet du grand prix des sciences mathématiques à décerner en 1891: »détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée». La même année, l'Académie des sciences de Copenhague se propose de couronner de sa médaille d'or une monographie de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN qui parviendrait à triompher des difficultés auxquelles donne naissance, aujourd'hui, l'application de cette fonction à la théorie des nombres.

moins précis, de peu d'importance peut-être, mais qui me paraît assez curieux.

Soit, comme chez RIEMANN, $f(x)$ le nombre des premiers inférieurs à x, augmenté du demi-nombre des carrés de premiers, de la troisième partie des cubes de premiers etc. au-dessous de la même limite, et soit $\operatorname{Li} x$ le logarithme intégral, c'est-à-dire

$$\operatorname{Li} x = \text{valeur principale de } \int_0^x \frac{dx}{\log x}$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dx}{\log x} \right].$$

Ceci posé, *il n'y a pas de limite au delà de laquelle la différence*

$$f(x) - (\operatorname{Li} x - \log 2)$$

ne change plus de signe.

C'est, comme on voit, un résultat un peu plus précis que celui qu'on doit à M. TCHEBYCHEFF.[1])

Ce théorème est une conséquence immédiate d'une proposition plus générale dont voici l'énoncé.

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x et α une constante positive non inférieure à l'unité, et supposons que l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

soit convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité, et qu'elle soit égale, dans le voisinage de $s = 1$, à une série procédant suivant les puissances positives de $s - 1$ et convergente dans un cercle dont le rayon est plus grand que l'unité; si x_0 et δ sont deux quantités positives choisies à volonté, aucune des deux inégalités

$$\varphi(x) > \delta, \quad \varphi(x) < -\delta$$

ne pourra subsister pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0.

1) *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, Mémoires des savants étrangers, S:t Pétersbourg 1851, et Journal de Liouville, t. 17, 1852.

Si l'on sait de plus que $\varphi(x)$ a une suite infinie de points de discontinuité x_ν, tels que, m_ν désignant une valeur positive plus petite que toutes les valeurs de l'expression

$$\varphi(x_\nu + h) - \varphi(x_\nu - 0)$$

pour $0 < h < h_\nu$, ces quantités m_ν et h_ν peuvent être choisies de sorte que

$$x_\nu + h_\nu \leqq x_{\nu+1}$$

et que la série

(1) $$\sum \frac{x_\nu + h_\nu}{m_\nu h_\nu}$$

ait une valeur infinie;

on pourra préciser encore et dire que $\varphi(x)$ changera de signe une infinité de fois au-dessus de toute limite finie.

En effet, puisque l'intégrale

$$\int_\alpha^{x_0} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

représente une fonction de s régulière dans tout le plan, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

pourra, aussi bien que l'intégrale

$$\int_\alpha^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx\,,$$

se développer dans une série procédant suivant les puissances croissantes de $(s-1)$ et convergente dans un cercle à rayon plus grand que l'unité. Soit

$$\Sigma c_\nu (s-1)^\nu$$

ce développement, l'égalité

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx = \Sigma c_\nu (s-1)^\nu$$

subsistera pour toutes les valeurs de s à l'intérieur du dit cercle et dont la partie réelle est supérieure à 1.

Comme $\varphi(x)$ ne change pas de signe sous le signe intégral, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

est uniformément convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle est plus grande qu'une valeur quelconque supérieure à l'unité. Par conséquent on a le droit de différentier sous le signe intégral. Différentiant n fois par rapport à s, nous aurons donc

$$(-1)^n \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^n dx = \underline{|n} \cdot c_n + \{s-1\},$$

$\{s-1\}$ désignant une quantité qui s'annule en même temps que $s-1$. Puisque $\varphi(x)$ et $\log x$ sont positifs, et que x^{-s-1} va toujours en croissant vers x^{-2} lorsque s décroît vers 1 (nous supposons $x_0 > 1$, ce qui est évidemment permis), on aura

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-2} (\log x)^n dx \geqq \underline{|n} |c_n|.$$

De l'autre côté on a toujours, G désignant une quantité finie et supérieure à x_0,

$$\int_{x_0}^{G} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^n dx < \underline{|n} |c_n| + |\{s-1\}|,$$

par conséquent

$$\int_{x_0}^{G} \varphi(x) x^{-2} (\log x)^n dx = \lim_{s=1} \int_{x_0}^{G} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^n dx \leqq \underline{|n} |c_n|.$$

Combinant ces deux résultats, on conclut que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-2} (\log x)^n \mathrm{d}x$$

converge et est égale à $\underline{|n} |c_n|$.

Tous les éléments étant positifs, on peut écrire

$$\sum |c_n| = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-2} \Sigma \frac{(\log x)^n}{\underline{|n}} dx = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-1} dx.$$

Or la série

$$\sum c_n(s-1)^n$$

ayant, par hypothèse, un rayon de convergence plus grand que l'unité, nous arrivons au résultat que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)x^{-1}dx$$

a une valeur finie.

Il est évident, dès lors, que l'on ne pourrait avoir pour $x > x_0$

$$\varphi(x) > \delta .$$

Mais supposons seulement qu'on ait

$$\varphi(x) \geqq 0 ,$$

l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)x^{-1}dx$$

sera supérieure ou égale à

$$\sum \int_{x\nu}^{x_\nu+h_\nu} \varphi(x)x^{-1}dx .$$

Or $\varphi(x_\nu + h)$ étant, par hypothèse, plus grand que

$$\varphi(x_\nu - 0) + m_\nu$$

pour $0 < h < h_\nu$, et $\varphi(x_\nu - 0)$ étant positif ou nul, on aura

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)x^{-1}dx > \sum m_\nu \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} \frac{dx}{x} > \sum \frac{m_\nu h_\nu}{x_\nu + h_\nu},$$

somme qui est infinie d'après l'hypothèse. Nous sommes donc, encore cette fois, arrivés à une contradiction.

Pour appliquer ce théorème à la démonstration du résultat que nous avons indiqué au commencement, soit $f(x)$ la fonction de RIEMANN dont nous avons rappelé plus haut la signification. Elle peut être définie le plus simplement, en disant qu'elle est constante au voisinage de toute valeur de x à l'exception des puissances de premiers, et que pour la valeur $x = p^\nu$, p étant un nombre premier, elle est discontinue de telle sorte que

$$f(p^\nu + 0) - f(p^\nu - 0) = \frac{1}{\nu}.$$

En partant de cette définition, on arrive immédiatement à la relation fondamentale de RIEMANN

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1}\, dx. \tag{2}$$

Nous rappelons succinctement la démonstration de cette formule. On a

$$\int_1^\infty f(x)x^{-s-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(n+0)\int_n^{n+1} x^{-s-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} f(n+0)\,(n^{-s-1} - (n+1)^{-s-1}) =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+0) - f(n-0)]n^{-s} =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{\nu,p} \frac{1}{\nu}\frac{1}{p^{\nu s}},$$

où ν parcourt la suite des nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$ et p la suite des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots$

Or on a, d'après Euler,

$$\prod \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = \sum \frac{1}{n^s}$$

p parcourant toujours la suite des nombres premiers et n la suite de tous les nombres entiers positifs. La fonction $\zeta(s)$ étant définie, pour $\Re(s) > 1$, par l'égalité

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s},$$

nous sommes donc arrivés à la formule (1).

Nous citerons encore quelques résultats relatifs à cette fonction $\zeta(s)$.

RIEMANN a démontré le premier que $\zeta(s)$ peut être définie comme une fonction analytique régulière dans tout le plan sauf au point $s = 1$ où elle a un infini simple au résidu 1. Ce même résultat a été obtenu par d'autres moyens par M. HERMITE (Comptes rendus, t. 101) et par M. JENSEN (Comptes rendus t. 107). M. JENSEN s'est occupé du calcul des coefficients du développement

$$(s-1)\zeta(s) - 1 = \sum c_\nu (s-1)^\nu$$

et a montré, en particulier, que le coefficient de $(s-1)$ est la constante connue sous le nom d'Euler ou de Mascheroni, résultat dont nous nous servirons plus loin. Citons encore, d'après RIEMANN, la propriété remarquable que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

ne change pas de valeur par la substitution de $1-s$ au lieu de s, et la représentation de cette fonction par l'expression

$$-\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty \psi(x) x^{-1}\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x},$$

où la dite propriété se trouve mise en évidence.

Pour faire l'application du théorème démontré plus haut, remarquons qu'il suit de cette représentation de la fonction $\zeta(s)$ qu'elle n'a pas de zéro, ni à l'intérieur, ni sur le contour du cercle

$$|s-1| = 1.$$

En effet, pour $|s-1| \leqq 1$, $x > 1$, on a

$$\left|x^{\frac{s}{2}}\right| \leqq x, \quad \left|x^{\frac{1-s}{2}}\right| \leqq x$$

de sorte que la valeur absolue de l'expression

$$s(1-s)\int_1^\infty \psi(x)x^{-1}\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)dx$$

est inférieure à

$$4\int_1^\infty \psi(x)dx < 0.06\,.$$

Donc la fonction

$$s(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

est différente de zéro pour les valeurs en question, et puisque

$$s(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = 2(1-s)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$$

conserve une valeur finie, la même chose a lieu au sujet de la fonction $\zeta(s)$ elle-même. On pourrait de même démontrer que la fonction $\zeta(s)$ est différente de zéro à l'intérieur et sur le contour du cercle $|s-2|=2$, résultat dont nous ferons usage plus bas.

La fonction

$$\log(1-s)\zeta(s)$$

est donc régulière à l'intérieur et sur le contour du cercle $|s-1|=1$. Pour $s=0$ elle a la valeur $-\log 2$. Par conséquent, la fonction

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}+\frac{\log(s-1)}{s}+\frac{\log 2}{s}$$

peut être développée dans une série procédant suivant les puissances positives de $s-1$ et convergente dans un cercle dont le rayon surpasse l'unité.

Or une intégration par parties nous donnera, pour $\alpha > 1$,

$$(3)\qquad \int_\alpha^\infty \mathrm{Li}\, x\cdot x^{-s-1}dx = \frac{\mathrm{Li}\,\alpha\cdot\alpha^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\int_\alpha^\infty\frac{x^{-s}dx}{\log x}\,.$$

L'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{-s}dx}{\log x}$$

donne, après quelques transformations élémentaires,

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{-s}dx}{\log x} = \int_{(s-1)\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi} = -\log(s-1) - \int_{(s-1)\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}d\xi + \int_{\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), on a

$$\int_{\alpha}^{\infty} \mathrm{Li}\, x \cdot x^{-s-1}dx = -\frac{\log(s-1)}{s} +$$

$$+\frac{1}{s}\left|\mathrm{Li}\,\alpha \cdot \alpha^{-s} - \int_{(s-1)\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}d\xi + \int_{\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi}\right|.$$

L'expression entre les crochets représente une fonction entière transcendante de s dont la valeur pour $s = 0$ est zéro. En effet, on obtient pour cette valeur l'expression

$$\mathrm{Li}\,\alpha - \int_{-\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}d\xi + \int_{\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi},$$

ce qui est nul indépendamment de la valeur de α. Car on a, par définition,

$$\mathrm{Li}\, e^{u} = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{u} \frac{e^{u}du}{u} = \text{v. p.}\int_{\infty}^{-u} \frac{e^{-u}du}{u}$$

$$= -\text{v. p.}\int_{-u}^{u} \frac{e^{-u}du}{u} - \int_{u}^{\infty} \frac{e^{-u}du}{u},$$

ce qui peut s'écrire, zéro étant la valeur principale de $\int_{-u}^{+u} \frac{du}{u}$,

$$\mathrm{Li}\, e^{u} = \int_{-u}^{+u} \frac{1-e^{-u}}{u}du - \int_{u}^{\infty} \frac{e^{-u}du}{u}.$$

On a par conséquent

$$(4)\qquad \int\limits_{\alpha}^{\infty} \mathrm{Li}\, x \cdot x^{-s-1} dx = -\frac{\log(s-1)}{s} + \text{fonction entière en } s.$$

On obtient de même

$$(5)\qquad \int\limits_{\alpha}^{\infty} \log 2 \cdot x^{-s-1} dx = \log 2 \cdot \frac{\alpha^{-s}}{s} = \frac{\log 2}{s} + \text{fonction entière en } s.$$

Il est donc démontré que l'intégrale

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} (f(x) - \mathrm{Li}\, x + \log 2) x^{-s-1} dx$$

peut se développer dans une série procédant suivant les puissances positives de $(s-1)$ et convergente dans un cercle

$$|s-1| = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1.$$

De plus, la fonction $f(x) - \mathrm{Li}\, x + \log 2 = \varphi(x)$ est discontinue pour $x = p$, p désignant un nombre premier, de telle sorte que

$$\varphi(p+0) - \varphi(p-0) = 1.$$

Pour $h < 1$, on a

$$\varphi(p+h) - \varphi(p+0) = \mathrm{Li}\, p - \mathrm{Li}\,(p+h) > -\frac{1}{\log p}.$$

Par conséquent

$$\varphi(p+h) - \varphi(p-0) > 1 - \frac{1}{\log p} > \frac{1}{2}$$

dès que $p > 7$. Prenant donc, dans l'expression (1),

$$x_\nu = p, \quad p > 7,$$
$$h_\nu = 1,$$

on pourra prendre

$$m_\nu = \frac{1}{2},$$

et on aura ce résultat que la série

$$\sum \frac{m_\nu h_\nu}{x_\nu + h_\nu} = \sum \frac{1}{2(p+1)}$$

a une valeur infinie.

Le théorème que nous avons énoncé à la page 600 se trouve donc rigoureusement démontré. Il est évident qu'on pourrait employer la même méthode pour démontrer une foule d'autres résultats du même genre.

Soit, p. ex., $\varphi(x)$ une fonction définie par ces conditions qu'elle sera constante entre deux puissances de premiers, et que lorsque x passe par une telle puissance p^ν, on aura

$$\varphi(p^\nu + 0) - \varphi(p^\nu - 0) = \log p .$$

Si $\psi(x)$ désigne la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x on aura

$$\varphi(x) = \psi(x) + \psi(x^{\frac{1}{2}}) + \psi(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots .$$

On obtient tout de suite

$$\int_1^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx = \sum \varphi(n+0) \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx = \sum \varphi(n+0) \frac{n^{-s} - (n+1)^{-s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s} \sum (\varphi(n+0) - \varphi(n-0)) n^{-s} = \frac{1}{s} \sum \frac{\log p}{p^{\nu s}}$$

$$= -\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \log \zeta(s)$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \log (s-1)\zeta(s) ,$$

c'est à dire

$$(6) \qquad \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{A}{s} + \mathfrak{P}(s-1) ,$$

le symbole $\mathfrak{P}(s-1)$ désignant une série de puissances convergente dans un cercle à rayon plus grand que l'unité, et A étant une constante dont nous écrirons plus bas la valeur.

Or on a

$$\int_1^\infty x \cdot x^{-s-1} dx = \int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}$$

$$\int_1^\infty A x^{-s-1} dx = \frac{A}{s} .$$

La constante A est facile à déterminer. On a

$$A = 1 + \left[\frac{d}{ds}\log(s-1)\zeta(s)\right]_{s=0} = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Or on a, d'après RIEMANN,

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{2}+s}\zeta(1-s)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{2}+s}s\zeta(1-s)$$

et, d'après M. JENSEN, comme nous l'avons rappelé plus haut,

(7) $$s\zeta(1-s) = -1 + Cs + \ldots$$

où C est la constante d'EULER. Différentiant et faisant $s = 0$, on a donc

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \log\pi - C$$

ou, puisqu'on a

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -C + 2\log 2,$$

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C,$$

(8) $$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log\frac{\pi}{2}.$$

On a donc démontré que la différence

$$\varphi(x) - \left(x - \log\frac{\pi}{2}\right)$$

ne peut maintenir le même signe depuis une limite quelconque jusqu'à l'infini.

M. GRAM donne, pour notre fonction $\varphi(x)$, la formule [1]

$$\varphi(x) = (x-1) + \lambda - \log(1-x^{-2}) - 2x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha\log x + \alpha\sin\alpha\log x}{\frac{1}{4}+\alpha^2}$$

[1]) J. P. GRAM, *Undersögelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse.* Écrits publiés par l'Académie royale des sciences de Copenhague, 1884.

et indique pour λ l'expression

$$\lambda = 2i\xi'\left(\frac{i}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\pi - C\,.$$

Il est facile de s'assurer qu'on a

$$1 - \lambda = \log\frac{\pi}{2}$$

de sorte que les termes les plus essentiels de la formule de M. GRAM sont identiques aux nôtres.

On démontrerait de la même manière, en faisant

$$\varphi(p^\nu + 0) - \varphi(p^\nu - 0) = \frac{1}{p^\nu}$$

et en partant de l'identité

$$(9) \qquad \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} dx = \frac{\log\zeta(s)}{s-1}$$

que la différence

$$\varphi(x) - (\log\log x + C)$$

change de signe une infinité de fois.

De même, si on définit $\psi(x)$ par les discontinuités

$$\psi(p^\nu + 0) - \psi(p^\nu - 0) = \frac{\log p}{p^\nu}\,,$$

ce qui entraîne l'identité

$$(10) \qquad \int_1^\infty \psi(x) x^{-s} dx = -\frac{\frac{d}{ds}\log\zeta(s)}{s-1}\,,$$

la même chose a lieu par rapport à la différence

$$\psi(x) - (\log x - C)\,.$$

A l'égard de ces deux expressions, $\varphi(x) - \log\log x - C$ et $\psi(x) - \log x + C$, il y a lieu de rappeler un mémoire de M. MERTENS où il démontre que leur valeur est toujours finie.[1])

Comme dernière application, considérons deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définies par les conditions suivantes. Si x est la

[1]) Journal de Crelle, t. 78, p. 46.

ν^e puissance d'un nombre premier, et de plus congru à 1 suivant le module 4, on aura

$$\varphi(x+0) - \varphi(x-0) = \frac{1}{\nu p^\nu},$$

et si

$$x = p^\nu \equiv 3, \text{ mod } 4,$$

on aura

$$\psi(x+0) - \psi(x-0) = \frac{1}{\nu p^\nu}.$$

Dans tout intervalle ne comprenant pas de ces valeurs particulières les deux fonctions auront une valeur constante.

On déduira sans peine

$$s\int_1^\infty \varphi(x)x^{-s-1}dx = \sum_{(p\equiv 1)} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_{(p^2\equiv 1)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{(p^3\equiv 1)} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

$$s\int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx = \sum_{(p\equiv 3)} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_{(p^2\equiv 3)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{(p^3\equiv 3)} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

Mettant

$$(11) \qquad \begin{aligned} L_1(s) &= \sum \frac{1}{n^s} \\ L_3(s) &= \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s} \end{aligned} \qquad (n = 1, 3, 5, 7 \ldots)$$

on aura, d'après DIRICHLET,

$$(12) \qquad \begin{aligned} s\int_1^\infty \varphi(x)x^{-s-1}dx &= \frac{1}{2}(\log L_1(s) + \log L_2(s)) \\ s\int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx &= \frac{1}{2}(\log L_1(s) - \log L_2(s)) . \end{aligned}$$

Quant à la fonction $L_1(s)$, elle est liée à $\zeta(s)$ par cette relation très simple:

$$L_1(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right).$$

Pour la fonction $L_2(s)$ on obtient immédiatement l'expression

$$(13) \qquad L_2(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1} dz}{e^z + e^{-z}}.$$

Mais si on veut tirer parti de la propriété dont jouit la fonction $L_2(s)$ que l'expression

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-s} L_2(s)$$

ne change pas de valeur quand s est remplacé par $1 - s$[1]), on déduit facilement, en suivant la voie de RIEMANN, la formule

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-s} L_2(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s-1}{2}} dx$$

où l'on a fait

$$(14) \qquad \psi(x) = \sum \left(\frac{-1}{n}\right) n e^{-\frac{n^2 \pi x}{4}} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots).$$

Or la fonction $\psi(x)$ a cette propriété que[2])

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\frac{3}{2}} \psi(x);$$

donc on peut écrire

$$(15) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-s} L_2(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} (x^s + x^{1-s}) dx,$$

formule qui met en évidence la propriété dont nous venons de parler.

A l'aide de cette formule, il serait facile de se convaincre que $L_2(s)$ est différent de zéro à l'intérieur et sur le contour du cercle

$$|s - 1| = 1.$$

Au voisinage de $s = 0$, on a

---

[1]) Cfr. HURWITZ, *Einige Eigenschaften der Dirichletschen Functionen* etc., Schlömilchs Zeitschrift, t. 27.

[2]) Voir p. ex. JACOBI, *Fundamenta*, Gesammelte Werke Bd 1, p. 236.

$$1-\frac{1}{2^s}=s\log 2+\ldots;$$

de plus on a

$$L_2(0)=\frac{2}{\pi}L_2(1)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dz}{e^z+e^{-z}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

On peut écrire, par conséquent,

$$(16)\qquad \begin{aligned}\frac{\log L_1(s)}{s}&=-\frac{\log(s-1)}{s}+\frac{\log s}{s}-\frac{\log 2-\log\log 2}{s}+\mathfrak{P}(s-1),\\ \frac{\log L_2(s)}{s}&=-\frac{\log 2}{s}+\mathfrak{P}(s-1),\end{aligned}$$

où les symboles $\mathfrak{P}(s-1)$ désignent, comme plus haut, deux séries de puissances dont les rayons de convergence sont supérieurs à l'unité.

Il suit de là que les trois expressions suivantes:

$$\varphi(x)-\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,x-\frac{1}{2}\log\frac{\log x}{\log 2}-\log 2\right),$$

$$\psi(x)-\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,x-\frac{1}{2}\log\frac{\log x}{\log 2}\right),$$

$$\varphi(x)-\psi(x)+\log 2,$$

changent de signe une infinité de fois.

Il est facile de déduire de ce résultat l'expression qu'a indiquée M. TCHEBYCHEFF, dans une lettre adressée à M. FUSS et publiée dans le *Bulletin de l'Académie de S:t Pétersbourg* 1853, pour l'excès du nombre des nombres premiers de la forme $4n+3$ sur ceux de la forme $4n+1$.

En effet, désignant par $\vartheta_\nu(x)$ et $\theta_\nu(x)$ le nombre de ν^{es} puissances de premiers congrues à 1 et à 3 resp. suivant le module 4, on a

$$(17)\qquad \begin{aligned}\varphi(x)&=\vartheta_1(x)+\frac{1}{2}\vartheta_2(x)+\frac{1}{3}\vartheta_3(x)+\ldots\\ \psi(x)&=\theta_1(x)+\quad * \quad+\frac{1}{3}\theta_3(x)+\ldots,\end{aligned}$$

car il n'y a pas de carrés de premiers congrus à 3, mod 4.

Or, il est facile de voir que

$$\lim \frac{\frac{1}{3}\vartheta_3(x)+\frac{1}{4}\vartheta_4(x)+\frac{1}{3}\theta_3(x)+\frac{1}{4}\theta_4(x)+\ldots}{\vartheta_2(x)}=0$$

pour x infini. Pour les valeurs de x où

$$\varphi(x)-\psi(x)+\log 2$$

est très petit, on obtiendra donc aussi une valeur très petite pour l'expression

$$\frac{\theta_1(x)-\vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)}-1.$$

Or on a

$$\frac{1}{2}\vartheta_2(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}} \quad \text{à peu près},$$

ce qui s'accorde avec l'expression de M. TCHEBYCHEFF qui est

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

Il faut avouer que nous n'avons pas démontré l'existence de valeurs de x telles qu'on a, *simultanément*,

$$\frac{\theta_1(x)-\vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)}=1 \quad \text{à peu près}$$

et

$$\frac{\vartheta_2(x)}{\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}}}=1 \quad \text{à peu près.}$$

Mais on peut surmonter cette difficulté sans trop de peine.

En effet, $f(x)$ désignant la fonction de RIEMANN étudiée au début de ce travail, on peut s'assurer qu'on a

$$\int_1^\infty f(x^{\frac{1}{2}})x^{-s-1}\,dx=\frac{\log \zeta(2s)}{s}=-\frac{\log(2s-1)}{s}-\frac{\log 2}{s}+\mathfrak{P}(s-1),$$

$\mathfrak{P}(s-1)$ ayant la même signification que plus haut. Comme on a

$$\int_\alpha^\infty \operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}} x^{-s-1}dx=-\frac{\log(2s-1)}{s}+\mathfrak{P}(s-1)$$

on obtient

$$\int_{\alpha}^{\infty}\left[f(x^{\frac{1}{2}}) - \operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}} + \log 2\right] x^{-s-1}dx = \mathfrak{P}(s-1)$$

et par conséquent aussi

$$\int_{\alpha}^{\infty}\left(\varphi(x) - \psi(x) - \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log 2\right) x^{-s-1}dx = \mathfrak{P}(s-1).$$

Donc la fonction

$$\psi(x) - \varphi(x) + \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\log 2$$

change de signe une infinité de fois.

Or, on peut écrire

$$\psi(x) - \varphi(x) = \theta_1(x) - \vartheta_1(x) - \frac{1}{2}\vartheta_2(x)(1+\delta),$$

$$\frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\vartheta_2(x)(1+\varepsilon),$$

$$\lim \delta = 0, \quad \lim \varepsilon = 0.$$

Par conséquent, il y a une infinité de valeurs de x, pour lesquelles la valeur absolue de l'expression

$$\frac{\theta_1(x) - \vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)} - \frac{\frac{1}{2}\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)}$$

est plus petite que toute quantité donnée d'avance.

Or, M. TCHEBYCHEFF a démontré rigoureusement[1]) que le rapport de $\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}}$ à $\vartheta_2(x)$ reste toujours fini.

Donc la même assertion est valable à l'égard de l'expression

$$\frac{\theta_1(x) - \vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\operatorname{Li} x^{\frac{1}{2}}} - 1,$$

et le théorème de M. TCHEBYCHEFF se trouve démontré.

---

[1]) *Mémoire sur les nombres premiers*, Mémoires des savants étrangers, S:t Pétersbourg, t. 7 (1854) et Journal de Liouville t. 17 (1852).