Lettre de M. le professeur Tchébychev à M. Fuss, sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$.

11 (23) MARS 1853.

(Bull. phys.-mathém., T. XI, p. 208).

La bienveillance, avec laquelle vous avez toujours agréé mes recherches, m'engage à vous présenter un nouveau résultat relatif aux nombres premiers et que je viens de trouver. En cherchant l'expression limitative des fonctions qui déterminent la totalité des nombres premiers de la forme $4n+1$ et de ceux de la forme $4n+3$, pris au-dessous d'une limite très grande, je suis parvenu à reconnaître que ces deux fonctions diffèrent notablement entre elles par leurs seconds termes, dont la valeur, pour les nombres $4n+3$, est plus grande que celle pour les nombres $4n+1$; ainsi, si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n+1$, et que l'on divise ensuite cette différence par la quantité $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles, que ce quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra. Cette différence dans la répartition des nombres premiers de la forme $4n+1$ et $4n+3$, se manifeste clairement dans plusieurs cas. Par exemple, 1) à mesure que c s'approche de zéro, la valeur de la série

$$e^{-3c}-e^{-5c}+e^{-7c}+e^{-11c}-e^{-13c}-e^{-17c}+e^{-19c}+e^{-23c}+\dots.$$

s'approche de $+\infty$; 2) la série

$$f(3)-f(5)+f(7)+f(11)-f(13)-f(17)+f(19)+f(23)+\dots.$$

où $f(x)$ est une fonction constamment décroissante, ne peut être convergente, à moins que la limite du produit $x^{\frac{1}{2}} f(x)$, pour $x = \infty$, ne soit zéro.

Je suis parvenu à ces résultats en traitant une certaine équation, relative aux nombres premiers, et qui comprend, comme cas particulier celle que M. A. de Polignac et moi, indépendamment l'un de l'autre, nous avons trouvée dans nos recherches sur les nombres premiers.

Agréez etc.

Signé: P. Tchébychev.

Le 10 mars 1853.