Un développement en 1/N intrinsèque en physique des solides

Joel Feldman[*,†]
Department of Mathematics
University of British Columbia
Vancouver, B.C.
CANADA V6T 1Z2

Jacques Magnen[†], Vincent Rivasseau[†]
Centre de Physique Théorique, CNRS UPR14
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex
FRANCE

Eugene Trubowitz
Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich
SWITZERLAND

Résumé Les développements à grands nombre de composantes dit aussi en $1/N$ sont un des outils les plus utilisés pour étudier non perturbativement les phénomènes critiques. En théorie du solide la discrétisation de la surface de Fermi introduit de manière naturelle un grand nombre de composantes ; en particulier si la singularité sur la surface de Fermi est régularisée par une brisure de symétrie d'ordre Δ, comme dans la théorie de la supraconductivité, alors $N \approx \frac{1}{\Delta})^{(d1)}$. A notre avis cette apparition "spontanée" d'un grand nombre de composantes doit avoir lieu pour tous les systèmes qui sont singuliers sur une hypersurface. C'est par exemple le cas du modèle d'Anderson des états localisés et étendus.

* Recherches financées en partie par le Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada et le Schweizerischer Nationalfonds zur Forderung der wissenschaftlichen Forschung
† Recherches financées en partie par le Forschungsinstitut für Mathematik, Zürich

§I Introduction

La plupart des comportements à longues distances sont décrits par une brisure de symétrie d'origine non perturbative. Par, exemple la génération de masse du modèle σ non-linéaire, le confinement des quarks et l'existence des paires de Cooper dans la théorie BCS de la supraconductivité. La méthode qui a eu le plus de succès pour analyser de tels phénomènes introduit de manière artificielle un grand nombre N de composantes. Ceci permet dans certains cas de dégager une partie dominante (pour N grand) qui bien que non perturbative est explicitement resommable. On procède alors à un développement en puissance de $1/N$ autour de cette solution.

Ceci est particulièrement clair dans le cas des modèles vectoriels. Dans un modèle vectoriel de fermions, l'interaction est du type $(\vec{\phi}\cdot\vec{\phi})^2$, la somme des graphes à $N=\infty$ est une série géométrique de bulles donc aisément resommable. En suivant ces, idées on peut calculer la génération de masse du modèle σ non linéaire ordre par ordre en $1/N$ et cet argument peut vraisemblablement être rendu rigoureux si N est assez grand. Par contre dans le cas plus compliqué des théories de jauges la théorie des perturbations à $N=\infty$ consiste en la somme des graphes planaires que l'on ne sait pas resommer. Dans ces exemples le développement en $1/N$ est artificiel car le nombre de composantes dans les modèles physiquement intéressants n'est pas grand.

Nous allons montrer dans la §II, que dans la théorie BCS, la surface de Fermi induit l'existence d'un grand nombre de composantes et d'un développement en $1/N$ correspondant. Le nombre de composantes est donné par la dicrétisation de la surface de Fermi en cellules de taille Δ, on a donc que $N=(1/\Delta)^{d1}$; où Δ caractérise la brisure de symétrie ; si λ est la constante de couplage $\Delta \approx e^{-1/\lambda}$, $\lambda > 0$. On a donc que N croit quand λ décroit. Nous allons en conclure que le fait que les corrections à l'équation BCS usuelle (qui est une approximation à une boucle de la véritable équation déterminant Δ) sont petites en $1/N$ est la raison pour laquelle cette équation est une bonne approximation. Des remarques analogues peuvent être faites pour beaucoup d'autres modèles en physique des solides où le propagateur libre est singulier le long d'une hypersurface, c'est en particulier le cas du modèle d'Anderson d'un électron dans un potentiel aléatoire.

Dans cette lettre nous étudions un modèle de la supraconductivité $\ell = 0$ en dimension d, $d \geq 2$. Plus précisément le modèle est caractérisé par son action :

$$\mathcal{A}(\psi, \bar{\psi}) \; = \; - \int \!d\!\!\bar{}k \, \big(ik_0 e(\mathbf{k})\big) \bar{\psi}(k)\psi(k) - \mathcal{V}(\psi, \bar{\psi}) \qquad \text{(I.1)}$$

où $k = (k_0, \mathbf{k}) \in \mathrm{I\!R}^{d+1}$, $d\!\!\bar{}k = \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}$ et $e(\mathbf{k}) \; = \; \frac{1}{\mathbf{2m}}\mathbf{k}^2 - \mu$.

Le terme d'interaction est

$$\mathcal{V}(\psi, \bar{\psi}) = \frac{\lambda}{2} \int \prod_{i=1}^{4} \; d\!\!\bar{}k_i \; (2\pi)^{d+1}\delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \; \bar{\psi}(k_1)\psi(k_3) \, \langle k_1, k_2 | \mathrm{V} | k_3, k_4 \rangle \, \bar{\psi}(k_2)\psi(k_4) \qquad \text{(I.2)}$$

et l'on suppose que $\lambda \; > \; 0$ et que $\langle s', -s' | \mathrm{V} | t', -t' \rangle$ est attractif et de plus dominant dans le secteur de moment angulaire zéro. De plus par définition, $k' = (0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\sqrt{\mathbf{2m}\mu})$ est la projection de k sur la surface de Fermi . Dans les formules au-dessus les champs électroniques sont des vecteurs $\psi(k) \; = \; \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(k) \\ \psi_\downarrow(k) \end{pmatrix}$ and $\bar{\psi}(k) \; = \; \big(\bar{\psi}_\uparrow(k), \bar{\psi}_\downarrow(k)\big)$ dont les composantes $\psi_\sigma(k)$, $\bar{\psi}_\sigma(k)$ sont les générateurs d'une algèbre de Grassmann de dimension infinie sur $\mathbb{C}$. C'est à dire que les champs anticommutent. La fonction génératrice des fonctions de Schwinger connexes et amputées est :

$$\mathcal{S}(\phi, \bar{\phi}) \; = \; \log \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \; e^{\mathcal{A}(\psi+\phi, \bar{\psi}+\bar{\phi})} \; \prod_{k,\sigma} d\psi_\sigma(k) \, d\bar{\psi}_\sigma(k)$$

§II Le vertex à N composantes dans le régime de la symétrie brisée

La théorie des perturbations de ce modèle est juste renormalizable. Pour étudier son comportement à longues distances, à température zéro, il est donc naturel de recourir à une analyse du type groupe de renormalization autour de la surface de Fermi ([1],[4]). Pour cela on décompose le propagateur en une somme de propagateurs partiels dont le support en moment est de plus en plus proche de la surface de Fermi. La théorie effective à une distance donnée de la surface de Fermi est obtenue par intégration sur les degrés de libertés correspondants à des moments plus éloignés de la surface de Fermi. Par exemple l'interaction effective à quatre fermions à une distance donnée de la surface de Fermi est donnée par la somme de tous les graphes connexes à quatre pattes externes ne contenant que des propagateurs plus éloignés de la surface de Fermi.

Pour analyser les comportements critiques en théorie euclidienne des champs, on définit des échelles de moment ; un champ k est d'échelle j si $|k| \approx M^j$. Où, $M > 1$ est une constante fixée qui détermine l'échelle logarithmique choisie. Si $j \to \infty$ (respectivement $j \to -\infty$), on analyse le comportement ultraviolet (respectivement infrarouge) du modèle étudié.

En théorie du solide (non relativiste) les échelles naturelles sont des couches de plus en plus fines autour de la surface de Fermi. Pour tout entier négatif $j = 0, -1, -2, ...$ la tranche j contient tous les moments dans la couche d'épaisseur M^j qui se trouve à une distance M^j de la surface de Fermi : $\{ \; k \in \mathrm{IR}^{d+1} \mid k_0 = 0, \; |\mathbf{k}| = \sqrt{2\mathbf{m}\mu} \; \}$. Le propagateur de la tranche j-th est :

$$C^j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \int đk \frac{e^{i\langle k, \xi_1 - \xi_2 \rangle_-}}{ik_0 - e(\mathbf{k})} 1_j \left(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2 \right) \tag{II.1}$$

où $1_j \left(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2 \right)$ est la fonction caractéristique de $M^j \leq |ik_0 - e(\mathbf{k})| < M^{j+1}$. Pour simplifier nous avons utiliser une partition de l'unité à l'aide de fonctions caractéristiques, bien qu'en réalité une démonstration rigoureuse utilise des fonctions lisses [1,II.1]. En sommant sur $j \leq 0$, on obtient le propagateur complet (avec coupure ultraviolette) $C(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j \leq 0} C_j(\xi_1, \xi_2)$.

Chaque propagateur de tranche (II.1) a son support dans l'espace des moments sur une variété à $d + 1$ dimensions avec bord. Les coordonnées naturelles pour une telle variété sont k_0, $\eta = e(\mathbf{k})$ et $\mathbf{k}' = \sqrt{2\mathbf{m}\mu} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$. Avec de telles coordonnées la couche j est $\{ \; k \mid M^j \leq \sqrt{k_0^2 + \eta^2} \leq \text{const}\, M^j \; \}$ c'est à dire topologiquement équivalent à $S^{d-1} \times S^1 \times [0, 1]$. Où le premier facteur, la sphère de Fermi S^{d-1} a un rayon macroscopique d'ordre 1 tandis que les autres facteurs $S^1 \times [0, 1]$ ont un petit diamètre M^j à l'échelle j.

Le fait que le support de la tranche à deux échelles, 1 et M^j, de tailles très différentes reflète l'anisotropie entre la fréquence k_0 et le moment $\mathbf{k}$ qui est le trait fondamental de ces modèles. Cela implique que, contrairement à la théorie des champs, le comportement de $C^j(\xi_1, \xi_2)$ à grands $\xi_1 - \xi_2$ n' est pas caractérisé par une longueur de décroissance en M^{-j}. En fait, C^j est de l'ordre de :

$$\left| C^j(\xi_1, \xi_2) \right| \leq \text{const}\, M^j \left[1 + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \right]^{(1-d)/2} \left[1 + M^j |\xi_1 - \xi_2| \right]^{-N}$$

(si on utilise des fonctions lisses pour les supports).

En termes de ces échelles on calcule le flot des constantes effectives des opérateurs relevants où marginaux (les opérateurs qui sont renormalisés). Il a été montré dans [1] que la partie de (I.2) qui est renormalisée correspond à l'interaction réduite $-\lambda \langle s', -s' | \mathrm{V} | t', -t' \rangle$. Si on développe celle-ci en harmonique sphériques :

$$-\lambda \langle s', -s' | \mathrm{V} | t', -t' \rangle \; = \; \sum_{n \geq 0} \lambda_n(0) \, \pi_n(s', t')$$

l'hypothèse de la section précédente devient : $\lambda_0(0) > 0$ and $\lambda_0(0) \gg |\lambda_n(0)|\,,\ n \geq 1$. Le flot déterminant est celui des constantes de couplages $\{ \; \lambda_n \; \big| \; n \geq 0 \; \}$. A l'échelle j leurs valeurs sont notées $\{ \; \lambda_n(j) \; \big| \; n \geq 0 \; \}$. Dans l'approximation au deuxième ordre on obtient: (see [1,I.85])

$$\lambda_n(j-1) \; = \; \lambda_n(j) + \beta(j) \, \lambda_n(j)^2$$

where $\beta(j) > 0$ and $\lim_{j \to -\infty} \beta(j) = \beta > 0$.

Donc dans cette approximation $\lambda_0(j)$ croît lentement quand j décroît jusqu'à l'échelle de la brisure de symétrie $\delta = -[1/\lambda_0(0)]$ et alors devient rapidement infini. Les autres constantes de couplage restent beaucoup plus petites que λ_0. Cette approximation cesse d'être valable en gros à l'échelle de δ. La divergence du flot induit par une surface de Fermi conduit à un point fixe non trivial ; ceci est typique de nombreuses situations en physique de la matière condensée.

L'analyse du type groupe de renormalisation esquissée plus haut se découpe en trois régimes distincts. Fixons $a \gg 1$ et soit Δ le paramètre de brisure de symétrie de BCS. Dans le premier régime, qui correspond aux indices j pour lesquels $M^j > a\Delta$ la constance de couplage effective $\lambda_0(j)$ est utilisée comme petit paramètre. La brisure de symmétrie à lieu dans le second régime où $\frac{1}{a}\Delta < M^j < a\Delta$. Le troisième régime $M^j < \frac{1}{a}\Delta$ est celui de la physique du boson de Goldstone. Comme expliqué plus haut dans les deux derniers régimes la constante de couplage n'est pas petite. Nous allons montré qu'aussi dans ces cas là il y a un autre petit paramètre.

Dans la suite de cette section nous considérons le régime intermédiaire, celui de la brisure de symétrie. L'indice le plus grand est $\delta = \log_M a\Delta$. Nous faisons l'hypothèse, basée sur la description du flot donné au-dessus, que le vertex effectif à l'échelle δ est donné par l'interaction BCS entre paires de Cooper:

$$\mathcal{V}_{\rm eff} \;=\; -\lambda_0(\delta)\int_{|q|<{\rm const}\,\Delta} \,\bar{d}q\,\bar{d}t\,\bar{d}s\;\bar\psi_\uparrow(t+\tfrac{q}{2})\bar\psi_\downarrow(-t+\tfrac{q}{2})\psi_\downarrow(-s+\tfrac{q}{2})\psi_\uparrow(s+\tfrac{q}{2}) \qquad \text{(II.2)}$$

Où, $0<\lambda_0(\delta)=O(1)$ à des corrections logarithmiques près. Tous les champs sont d'échelle voisine de δ si bien que les intégrales sont toutes implicitement restreintes par $|e(\pm t+\frac{q}{2})|$, $|e(\pm s+\frac{q}{2})|$, $|t_0|$, $|s_0|<{\rm const}\,\Delta$. Cette hypothèse peut-être justifiée non perturbativement [1, 2] en dimensions deux, et perturbativement en dimension trois [1].

Donc les moments sont dans la couche $S=\{\;k\;|\;\frac{1}{a}\Delta\le\sqrt{k_0^2+\eta^2}\le a\Delta\;\}$. Pour obtenir des régions isotropes de côté Δ dans l'espace des moments il est naturel de diviser encore cette couche en $N=\Delta^{-(d-1)}$ cellules, chacune étant approximativement isotrope et de côté d'ordre Δ. Chaque cellule est appelé un secteur. Ces secteurs fonctionnent comme les couleurs d'un modèle à plusieurs composantes. Le propagateur libre moyen du secteur Σ est

$$C_\Sigma(\xi_1,\xi_2) \;=\; \delta_{\sigma_1,\sigma_2}\int \bar{d}k\,\frac{e^{i\langle k,\xi_1-\xi_2\rangle_-}}{ik_0-e(\mathbf{k})}S(k)\,\Sigma(\mathbf{k})$$

où $\Sigma(\mathbf{k})$ à son support dans le secteur Σ et où par abus de notation $S(k)$ est la fonction caractéristique de S. Le propagateur complet du régime de la brisure de symétrie est avec ces notations, $\sum_\Sigma C_\Sigma$. A cette décomposition correspond une décomposition othogonales des champs.

Notons qu'une conséquence du principe de Pauli est qu'en gros au plus deux champs de spin un-demi peuvent être simultanément contenus dans une boîte de l'espace de configuration de cté, $(a\Delta)^{-1}$ si leur moments sont dans $S\cap\Sigma$. Donc il y a au plus $O(\Delta^{-(d1)})$ champs de moments dans S. C'est à dire que par secteur le principe de Pauli s'applique bien, tandis que pour la couche complète celui-ci permet une accumulation dépendant de Δ qui rappelle les modèles bosoniques. Cette décomposition est analogue à celle utilisée par Haldane dans son étude non perturbative de la surface de Fermi. Nous insistons sur le fait que les secteurs ne sont pas nécessaires pour étudier individuellement les graphes de la théorie des perturbations. Cependant ils jouent un rôle essentiel dans [2] où nous montrons que à deux dimensions,

$$\sum_{n\ge 0}\tfrac{1}{n!}(\tfrac{\lambda}{2})^n{\sum}'{\rm Amp}(G)$$

est analytique dans un voisinage de $\lambda = 0$. Le prime de la somme, au-dessus désigne la somme sur tous les graphes G ne contenant pas de sous graphes à deux paires de Cooper et $\mathrm{Amp}(G)$ est l'amplitude du graphe G dont les sous diagrammes à deux points ont été renormalisés. Nous allons montrer que l'interaction effective dans le régime de la brisure de symétrie est de type $1/N$, quelque soit la dimension. Dans [6], nous montrons que si $d = 2$, alors l'interaction complète a une structure vectorielle même dans le premier régime.

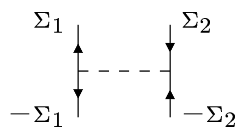
Développé en secteurs, le vertex effectif (II.2) devient

$$\sum_{\Sigma_1,\cdots,\Sigma_4} -\lambda_0(\delta) \int_{|q|<\mathrm{const}\,\Delta} đq\, đs_1\, đs_2\ \bar\psi_{\Sigma_1,\uparrow(s_1+\frac{q}{2})} \bar\psi_{\Sigma_3,\downarrow(-s_1+\frac{q}{2})} \psi_{\Sigma_4,\downarrow(-s_2+\frac{q}{2})} \psi_{\Sigma_2,\uparrow(s_2+\frac{q}{2})}$$

Où, à priori, les quatre sommes courent sur $(\mathrm{const}\,\Delta)^{-(d1)}$ secteurs. De plus, $|q| < \mathrm{const}\,\Delta$ et les moments $s_1 + \frac{q}{2}$, $-s_1 + \frac{q}{2}$ doivent être respectivement dans les secteurs Σ_1 and Σ_3 . Donc, Σ_1 and Σ_3 sont opposés (aux plus proches voisins près). De même, les secteurs Σ_2 et Σ_4 sont aussi opposés (aux plus proches voisins près). En cons'equence, on peut traiter (II.2) comme le vertex

$$\sum_{\Sigma_1,\Sigma_2} -\lambda_0(\delta) \int đq\, đs_1\, đs_2\ \bar\psi_{\Sigma_1,\uparrow(s_1+\frac{q}{2})} \bar\psi_{-\Sigma_1,\downarrow(-s_1+\frac{q}{2})} \psi_{-\Sigma_2,\downarrow(-s_2+\frac{q}{2})} \psi_{\Sigma_2,\uparrow(s_2+\frac{q}{2})} \tag{II.3}$$

où $-\Sigma$ est le secteur opposé à Σ et les plus proches voisins sont ignorés. De plus la contrainte $|q| < \mathrm{const}\,\Delta$ est automatiquement respectée.



Ce vertex a clairement la structure de celui d'un modèle vectoriel à $N = \mathrm{const}\,\Delta^{-(d1)}$ composantes. Sur la figure, les secteurs ("couleurs") Σ_1 et $-\Sigma_1$ entrent sur la gauche de la ligne d'interaction (ici le pointillé) et les secteurs Σ_2 et $-\Sigma_2$ emergent sur la droite. Dans un graphe le secteur est donc conservé à une symétrie près le long d'une ligne de fermions.

Nous vérifions maintenant, par comptage de puissance, que le poids d'un vertex effectif est en $1/N$. Soit $G_{n,p}$ un graphe connexe avec n vertex (II.3) et $2p$ lignes externes. Supposons d'abord que chaque ligne interne est dans un secteur Σ, son propagateur est $\frac{S(k)\,\Sigma(\mathbf{k})}{ik_0 - e(\mathbf{k})}$. Chaque propagateur de ce type est borné par $\frac{1}{\Delta}$ et intégré sur un volume Δ^{d+1}. Comme le nombre l de lignes et le nombre L de boucles indépendantes sont donnés par,

$$l = 2n - p$$

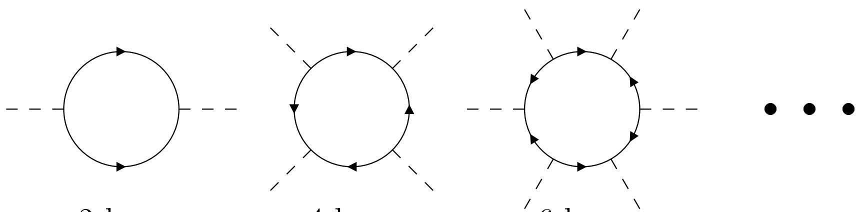
$$L = l - n + 1 = n - p + 1$$

le comptage perturbatif pour $G_{n,p}$ est

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{l} \Delta^{L(d+1)} = \Delta^{n(d-1)} \Delta^{-pd+d+1} = O(N^{-n})$$

On voit donc que chaque vertex a un poids $1/N$.

Il faut maintenant, comme dans tout modèle vectoriel, sommer sur les secteurs internes de $G_{n,p}$. Il y a exactement une et une seule telle somme, contenant N termes, par boucle fermionique, puisque tous les secteurs d'une boucle sont identiques à une symmétrie près. Le poids d'une m-boucle contenant m demi-vertex et une somme sur les secteurs, est



2-loop 4-loop 6-loop

donc : $O(N^{1-m/2})$ ce qui correspond aux poids en $1/N$ d'un modèle vectoriel. En particulier le poids d'une bulle ($m = 2$)est donc $O(1)$, alors que toutes les boucles d'ordre plus élevé sont petites en $1/N$.

§III Le régime du boson de Goldstone

Nous considérons maintenant le dernier régime, celui du boson de Goldstone. On réexprime d'abord le modèle dont l'interaction est donnée par (II.2), en utilisant une transformation de Hubbard-Stratonovich, en termes d'un modèle avec un fermion de spin un-demi, $\overset{(-)}{\psi}$ et de deux champs bosoniques, γ_1, γ_2, qui sont réels dans l'espace de configuration. L'action du modèle transformé est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\psi, \bar{\psi}, \gamma_1, \gamma_2) \;=\; & -\int_{|ik_0 - e(\mathbf{k})| < a\Delta} \not{d}k \;\; \bar{\psi}(k)(ik_0 - e(\mathbf{k}))\psi(k) - \sum_{j=1}^{2} \tfrac{1}{2} \int_{|q| < a\Delta} \not{d}q \;\; \bar{\gamma}_j(q)\gamma_j(q) \\ & + g \int \not{d}t \, \not{d}q \left(\Gamma(q)\bar{\psi}_{\uparrow}(t + \tfrac{q}{2})\bar{\psi}_{\downarrow}(-t + \tfrac{q}{2}) + \bar{\Gamma}(q)\psi_{\downarrow}(-t + \tfrac{q}{2})\psi_{\uparrow}(t + \tfrac{q}{2})\right)\end{aligned}$$

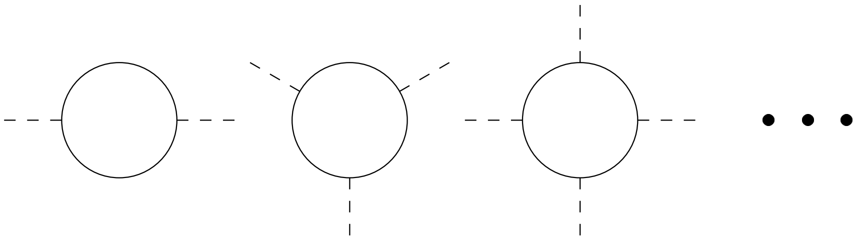
où $\lambda_0(\delta) = 2g^2$ and $\Gamma(q) = \gamma_1(q) + i\gamma_2(q)$. Le potentiel effectif correspondant à cette action est obtenu en intégrant les fermions à Γ fixé constant dans l'espace de configuration. Le résultat est un chapeau mexicain dont le minimum est atteint pour $g|\Gamma(\xi)| = \Delta$, où Δ est le paramètre de BCS. La phase de Γ est fixée par la condition au bord. Supposons que cette phase est nulle. Changeons de variables et décrivons Γ en termes des composantes normale et tangentielle à $g|\Gamma(\xi)| = \Delta$ à $g\Gamma = \Delta$. C'est à dire,

$$\Phi(\xi) = \gamma_\nu(\xi) + i\gamma_\tau(\xi) = \gamma_1(\xi) - \Delta/g + i\gamma_2(\xi)$$

L'action devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\psi,\bar\psi,\Phi) \;=\; & -\int_{|ik_0-e(\mathbf{k})|<a\Delta} đk\;\; [\bar\psi(k)(ik_0 - e(\mathbf{k}))\psi(k) - \Delta\bar\psi_\uparrow(k)\bar\psi_\downarrow(-k) - \Delta\psi_\downarrow(-k)\psi_\uparrow(k)] \\
& - \tfrac{1}{2}\int_{|q|<a\Delta} đq\;\; [\bar\gamma_\nu(q)\gamma_\nu(q) + \bar\gamma_\tau(q)\gamma_\tau(q)] - \Delta\gamma_\nu(0)/g + \text{const} \qquad \text{(III.1)} \\
& + g\int đt\, đq\, \big(\Phi(q)\bar\psi_\uparrow(t+\tfrac{q}{2})\bar\psi_\downarrow(-t+\tfrac{q}{2}) + \bar\Phi(q)\psi_\downarrow(-t+\tfrac{q}{2})\psi_\uparrow(t+\tfrac{q}{2})\big)
\end{aligned}$$

Si les fermions sont intégrés en utilisant le propagateur donné par la première ligne de (III.1), les vertex généralisés du modèle obtenu sont de la forme



2-loop 3-loop 4-loop

Les lignes continues de ces vertex généralisés représentent les propagateurs

$$\begin{aligned}
\big\langle\psi_\uparrow(k)\bar\psi_\uparrow(p)\big\rangle = \big\langle\psi_\downarrow(k)\bar\psi_\downarrow(p)\big\rangle \;&=\; -\frac{ik_0 + e(\mathbf{k})}{k_0^2 + e(\mathbf{k})^2 + \Delta^2}(2\pi)^{d+1}\delta(k-p)\Theta(k_0^2+e(\mathbf{k})^2 \le a^2\Delta^2) \\
\langle\psi_\uparrow(k)\psi_\downarrow(-p)\rangle = \big\langle\bar\psi_\downarrow(-k)\bar\psi_\uparrow(p)\big\rangle \;&=\; -\frac{\Delta}{k_0^2 + e(\mathbf{k})^2 + \Delta^2}(2\pi)^{d+1}\delta(k-p)\Theta(k_0^2+e(\mathbf{k})^2 \le a^2\Delta^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\uparrow(k)\psi_\uparrow(p)\rangle = \langle\psi_\downarrow(k)\psi_\downarrow(p)\rangle = \big\langle\bar\psi_\uparrow(k)\bar\psi_\uparrow(p)\big\rangle = 0 \\
\big\langle\bar\psi_\downarrow(k)\bar\psi_\downarrow(p)\big\rangle = \big\langle\psi_\uparrow(k)\bar\psi_\downarrow(p)\big\rangle = \big\langle\psi_\downarrow(k)\bar\psi_\uparrow(p)\big\rangle = 0
\end{aligned}$$

Dans l'espace des moments ces lignes sont bornées par $\dfrac{\text{const}}{\Delta}$ et leur support est de volume $\text{const}\,\Delta^2$. Remarquons que contrairement à la §II, il ya aussi des boucles impaires car la symmétrie fermions anti-fermions a été brisée.

Les propagateurs de γ_ν, γ_τ sont obtenus en combinant les termes constants et d'ordre $O(q^2)$ du développement de Taylor en q de la boucle à deux vertex avec la seconde ligne de (III.1). Le propagateur de γ_ν est une constante. Pour γ_τ il est donné par $\frac{\text{const}\,\Delta^2}{q_0^2+\text{const}\,\mathbf{q}^2}$. Donc le régime du boson de Goldstone est semblable à une théorie (locale) des champs avec coupure ultraviolette, ayant deux bosons l'un massif l'autre de masse nulle. Il y a des vertex à $n+m$ points $\gamma_\nu^m \gamma_\tau^n$ pour tous m and n. Tous ces vertex sont superrenormalisables à l'exception des cas $m=0\,,\, n\leq 6$ et $m=1\,,\, n\leq 3$ à deux dimensions et $m=0\,,\, n\leq 4$ et $m=1\,,\, n\leq 2$ à trois dimensions. Pour les autres vertex on utilise des identités de Ward [3] approchées qui montrent que les parties singulières de ces vertex sont nulles.

Une analyse semblable doit pouvoir être faite pour la fonction à quatre points

$$\langle G_{+(x,y,E+\omega+i\varepsilon)} G_{-(x,y,E-\omega-i\varepsilon)} \rangle = \int d\mu(V)\ \frac{1}{-\Delta-(E+\omega+i\varepsilon)+\ \lambda V}\ (x,y)\ \frac{1}{-\Delta-(E-\omega-i\varepsilon)+\ \lambda V}\ (x,y)$$

du modèle d'Anderson, où $V(x)$, $x\in\mathbb{Z}^d$, est une famille de variables aléatoires, réelles, gaussiennes,indépendantes, identiquement distribuées. De nouveau il faudrait décomposer l'hypersurface singulière du propagateur libre $G_0(x,y,\varepsilon)=\int_{T^d}\frac{e^{-i\langle k,xy\rangle}}{k^2-E-i\varepsilon}$ en secteurs.

References

[1] J. Feldman and E. Trubowitz, "The flow of an Electron-Phonon system to the Superconducting State", Helvetica Physica Acta, **64** 213-357 (1991).

[2] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz, "An infinite Volume Expansion for Many Fermion Green's Functions", Helvetica Physica Acta, **65** 679-721 (1992).

[3] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz, "Ward Identities and a Perturbative Analysis of a U(1) Goldstone Boson in a Many Fermion System", à paraître dans Helvetica Physica Acta.

[4] J. Feldman and E. Trubowitz, "Perturbation theory for Many Fermion Systems, Helvetica Physica Acta, **63** 156-260 (1990)

[5] V. Rivasseau, "From perturbative to constructive renormalization", Princeton University Press 1991.

[6] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz, "Two Dimensional Many Fermion Systems as Vector Models", Preprint.