מבוא של פונקציות גזירות למשתנים - תרגול 4

פונקציות בכמה משתנים:

הגדרה: $f: U\to\mathbb{R}^m$ (U פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) (לאו דווקא $n=m$) f נקראת שדה וקטורי

f נקראת דיפרנציאבילית ב-$x_0\in U$ אם קיימת העתקה לינארית $L_{x_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש- $f(\vec{x}_0+\vec{h})=f(\vec{x}_0)+L_{x_0}(\vec{h})+o(\vec{h})$ לכל $h\in\mathbb{R}^n$

כלומר

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-L_{x_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=0$$

f דיפרנציאבילית $\Rightarrow$ קיימות הנגזרות החלקיות ו-

אז

$$f'(\vec{x}_0)=Df(\vec{x}_0)=L_{x_0}=\underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right)_{i,j}}_{\text{מטריצת יעקוביאן}}$$

(מטריצת הנגזרות החלקיות)

בפרט, אם $m=1$ נקבל $Df(\vec{x}_0)=[\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)]^T$. אם $m=n=1$: $Df(x_0)=(f'(x_0))$

תכונות: אם $Df(\vec{x}_0)$ קיימת היא יחידה

(2) $f:U\to\mathbb{R}^m$ קבועה $\Leftrightarrow$ $Df(\vec{x}_0)=0$ לכל $\vec{x}_0\in U$

(3) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לינארית, כלומר $f(\vec{x})=A\vec{x}$, $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

אז $Df\equiv A$

(4) לינאריות: $D(\alpha f+\beta g)=\alpha Df+\beta Dg$

(5) כלל לייבניץ: $D(f\cdot g)(\vec{x})=Df(\vec{x})\cdot g(\vec{x})+f(\vec{x})\cdot Dg(\vec{x})$, $f,g:U\to\mathbb{R}^m$ מכפלה סקלרית

(6) כלל השרשרת: $D(g\circ f)(x)=\underbrace{[Dg(f(x))][Df(x)]}_{\text{כפל מטריצות}}$

$U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $V\subseteq\mathbb{R}^m$

דוגמה: $g(x,y)=\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\ \arctan\frac{y}{x}\end{pmatrix}$, $f(r,\varphi)=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$

חשב $D(f\circ g)(x,y)$ כאשר $U=\{(x,y)\mid x,y>0\}$

$$D(f\circ g)(x,y)=[Df(g(x,y))][Dg(x,y)]=\left[\begin{bmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{bmatrix}(x,y)\right]\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{x\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ry\sin\varphi}{x^2+y^2} & \frac{y\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{rx\sin\varphi}{x^2+y^2}\\ \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ry\cos\varphi}{x^2+y^2} & \frac{y\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{rx\cos\varphi}{x^2+y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x\cos\varphi+y\sin\varphi}{r} & \frac{y\cos\varphi-x\sin\varphi}{r}\\ \frac{x\sin\varphi-y\cos\varphi}{r} & \frac{y\sin\varphi+x\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

תרגיל:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} e^{x+2y} \\ 2\sin(y+2x) \end{pmatrix}$$

$$g(u,v,w)=\begin{pmatrix} u+2v^2+3w^3 \\ 2v-u^2 \end{pmatrix}$$

$h(u,v,w)=f\circ g(u,v,w)$

חשבו $Dh(1,-1,1)$.

פתרון: $g(1,-1,1)=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$Dh(1,-1,1)=Df(g(\ldots))\,Dg(1,-1,1)=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{pmatrix}_{g(1,-1,1)=(6,-3)} \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}_{(1,-1,1)}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & 18 \end{pmatrix}$$

תרגיל: נגזרות חלקיות מסדר שני: $\tilde{f}(x,y)=f(x(s,t),y(s,t))$ אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$$

משפט הפונקציה ההפוכה:

תהי $f: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $(m=n)$ גזירה ברציפות (C^1).

נסמן: $Jf(\vec{x}_0)=\det(Df(x_0))$ היעקוביאן של f ב-$\vec{x}_0$

אם $Jf(\vec{x}_0)\neq 0$ אז יש סביבה $V\subseteq U$ של $\vec{x}_0$

שבה f הפיכה ומתקיים: $Df^{-1}(f(\vec{x}_0))=[Df(\vec{x}_0)]^{-1}$

הערה: $Jf(\vec{x}_0)=0 \not\Rightarrow$ f לא הפיכה. דוגמא: $f(x)=x^3$

דוגמא: f לינארית, כלומר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f(\vec{x})=A\vec{x}$

כש $A\in M_n(\mathbb{R})$ אז $Df\equiv A$ ו- f הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$

ואז $f^{-1}(\vec{x})=A^{-1}\vec{x} \Rightarrow Df^{-1}=A^{-1}$,

הערה: המשפט (הפיכות מקומית) הינו מקומי לכל נק' ב- $f(\vec{x})$ יש $\vec{x}$! (למשל $y=x^2$)

דוגמא: $f(x,y)=\begin{pmatrix} e^x\cos y \\ e^x\sin y \end{pmatrix}$ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ נמצא f^{-1} (מקומית) אם f הפיכה

פתרון:

$$Jf=\det\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}=e^{2x}$$

שימו לב: (א) f אינה הפיכה

(ב) f על $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

(רשב) (Df^{-1}) :

$$D(f^{-1}) = (Df)^{-1} = \frac{1}{e^{2x}}\begin{pmatrix} e^x\cos y & e^x\sin y \\ -e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos y & e^{-x}\sin y \\ -e^{-x}\sin y & e^{-x}\cos y\end{pmatrix}$$

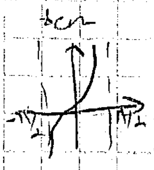
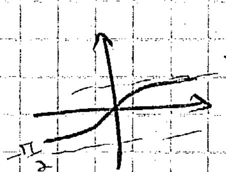
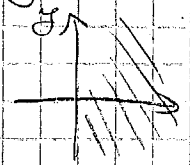
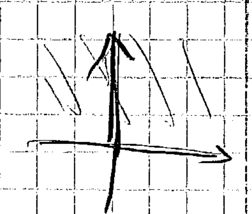
מפורש $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x\cos y\\ e^x\sin y\end{pmatrix}$ $\qquad g := f^{-1}$ (נסמן)

$u^2+v^2=e^{2x}$

$\tan y = \frac{v}{u}$

$\Leftarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$

$y = \text{"}\arctan\text{"}\left(\frac{v}{u}\right)$ ← [illegible]

$\operatorname{arccot}\left(\frac{u}{v}\right)$

תרגיל: הראה $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^2-yz\\ x+z+y\\ zx+y^2x\end{pmatrix}$ הפיכה ב־$(1,0,0)$

מצא קירוב ליניארי של f^{-1} ... $Df^{-1}(1,0,0)$ [illegible]

של $f(1,0,0)$

פתרון: $Df = \begin{pmatrix}2x & -z & -y\\ z & 1 & x\\ y^2 & 2yx & x\end{pmatrix} \Rightarrow Df(1,0,0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

לכן $J_f(1,0,0)=2\neq 0 \Rightarrow f$ הפיכה, $f(1,0,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

ובנוסף $D(f^{-1})(1,0,0)=\begin{pmatrix}\frac12&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ אם נסמן $f^{-1}=g=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}$

$Dg = \begin{pmatrix}\frac12&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ מתקיים ש־ בסביבה של $f(1,0,0)$ (ק"ל)

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$

$$g(\vec x) = g(\vec x_0) + Dg(\vec x-\vec x_0) + o(\|\vec x-\vec x_0\|) = \begin{pmatrix}1+\frac12(x-x_0)\\ (y-y_0)-(z-z_0)\\ (z-z_0)\end{pmatrix} + o(\|\vec x-\vec x_0\|)$$