חדו"א 2 פונקציות מרובות משתנים - תרגול 2

מכפלה וקטורית: כאן $n=3$. עבור $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ מוגדרת המכפלה הוקטורית להיות:

$$\vec{x}\times\vec{y}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,x_i y_j \vec{e}_k=\begin{vmatrix}\hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\ x_3y_1-x_1y_3\\ x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk}=\frac{(j-i)(k-i)(k-j)}{2}$$

מבחינה גאומטרית: $\vec{x}\times\vec{y}$ הוא וקטור ניצב למישור הנפרש ע"י $\vec{x},\vec{y}$ (אם $\vec{x}\parallel\vec{y}$ אז $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{0}$) כיוונו נקבע ע"פ כלל יד ימין ואורכו $\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\sin\theta$ כאשר θ הזווית בין הוקטורים.

זה גם נפח המקבילית הנפרשת ע"י $\vec{x},\vec{y}$ ו- $\vec{x}\times\vec{y}$ (וקטור יחידה בכיוון).

תרגיל: עבור $\vec{a}=(2,-3,1),\vec{b}=(-3,1,2),\vec{c}=(1,2,3)$ חשבו $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$$a\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{pmatrix}10\\15\\19\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

מסקנה: המכפלה הוקטורית לא אסוציאטיבית.

תרגיל: $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$.

$(\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik})$

תרגיל: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ - מכפלה משולשת.

ישרים:

ישר ב- $\mathbb{R}^n$ נקבע ע"י:

* **שתי נקודות**: $P_1,P_2\in\mathbb{R}^n$ עם $P_1\neq P_2$ $\qquad l=\{P_1+t\overrightarrow{P_1P_2}\mid t\in\mathbb{R}\}$
* **נקודה וכיוון**: $P\in\mathbb{R}^n,\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ עם $\vec{v}\neq0$ $\qquad l=\{P+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$

תרגיל: עבור אילו ערכי α,β שני הוקטורים $\vec{a}=(3,1,\alpha),\vec{b}=(\beta,-5,2)\in\mathbb{R}^3$ תלויים לינארית? במקרה זה, מצאו משוואת ישר בכיוון זה העובר דרך $P=(1,2,3)$

פתרון: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\exists\gamma\neq0:\vec{a}=\gamma\vec{b}$ כלומר

$$\begin{cases}3=\beta\gamma\\ 1=-5\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\gamma=-\frac{1}{5}\\ \alpha=-\frac{2}{5}\\ \beta=-15\end{matrix}\Rightarrow b=(-15,-5,2)$$

$$\Rightarrow l=\{(1,2,3)+t(-15,-5,2)\mid t\in\mathbb{R}\}=\{(1-15t,2-5t,3+2t)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

מישורים: מישור הוא תת מרחב דו מימדי מוזז ב- $\mathbb{R}^n$ מאופיין ע"י:

* שלוש נקודות שונות: $P_1,P_2,P_3\in\mathbb{R}^n$ $\qquad\Pi=\{P_1+t\overrightarrow{P_1P_2}+s\overrightarrow{P_1P_3}\mid t,s\in\mathbb{R}\}$
* נקודה ושני כיוונים: $P\in\mathbb{R}^n$, $\vec{v},\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\neq0$, $\vec{v}\neq\vec{u}$ $\qquad\Pi=\{P+t\vec{v}+s\vec{u}\mid t,s\in\mathbb{R}\}$

$(n=3)$ * נקודה וכיוון נורמל: $P=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{R}^3$

$$\Pi=\{\underbrace{(x,y,z)}_{q}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{pq}\perp\vec{n}\}$$

דרך אלגברית: $n_1x+n_2y+n_3z+d=0$ $\quad(\vec{n}\parallel\vec{u}\times\vec{v})$

כאשר $d=-(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3)$

הערה: שני ישרים יכולים להיות: מקבילים, נחתכים, מצטלבים, מתלכדים

שני מישורים יכולים להיות: מקבילים, נחתכים או מתלכדים

כאשר שני מישורים (לא מקבילים) נחתכים אז החיתוך הוא ישר

תרגיל: נתונים שני מישורים לא מקבילים $\Pi_1,\Pi_2 \subseteq\mathbb{R}^3$ מצא את כיוון של החיתוך שלהם.

פתרון: $\vec{n}_1\perp\Pi_1$, $\vec{n}_2\perp\Pi_2$. מהנתון $\vec{n}_1\not\parallel\vec{n}_2$. כיוון החיתוך

המישורים מוכל ב- Π_1 ו- Π_2 ולכן ניצב ל- $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ $\Rightarrow$ $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

מרחק בין מישור לנקודה: עבור שתי נקודות $p,q\in\mathbb{R}^n$: $d(p,q)=\|\vec{pq}\|$

בהינתן מישור Π ונקודה $p\notin\Pi$ נגדיר את המרחק ביניהם להיות:

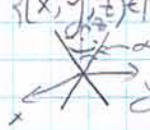
$$d(\Pi,p)=\inf\{\|\vec{pq}\| \mid q\in\Pi\}=\min\{\|\vec{pq}\| \mid q\in\Pi\}$$

תרגיל: מצאו נקודה $q\in\Pi$ כך ש- $d(\Pi,p)=\|\vec{pq}\|$.

פתרון: $\vec{n}\perp\Pi$, מעבירים דרך p ישר בכיוון $\vec{n}$. ישר זה חותך את המישור בנקודה אחת q. מפיתגורס, לכל נקודה אחרת $q'\in\Pi$ $\|\vec{pq'}\|\geq\|\vec{pq}\|$ ומכאן המסקנה.

תרגיל: איך מגדירים מרחק בין נקודה לישר?

חתכי חרוט: נקבע חרוט ב-$\mathbb{R}^3$: $\alpha>0$ $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=(tg\,\alpha z)^2\}$



מה הצורות המתקבלות ע"י חיתוך החרוט עם מישור?

חתכים קלאסיים:

* מעגל $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{R}\right)^2=1$ מרכז (x_0,y_0) רדיוס R

* אליפסה $\left(\frac{x-x_0}{R_1}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{R}\right)^2=1$  $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, $B^2-4AC<0$

* פרבולה $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $\quad B^2-4AC=0$ $\quad ((y-y_0)=R(x-x_0)^2)$

* היפרבולה $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $\quad B^2-4AC>0$ $\quad \left(\frac{x-x_0}{R_1}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{R_2}\right)^2=1$

פונקציות וקטוריות במשתנה אחד:

למשל: מיקום, מהירות לפי זמן של חלקיק.

עקומות עם פרמטריזציה:

$\vec{r}:(a,b)\to\mathbb{R}^n$, $\vec{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, [כך ש- $r_i:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה ורציפה למקוטעין] ← נאמר ש-$\vec{r}$ תיקרא עקום עם פרמטריזציה

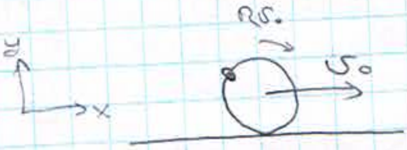
גם תחום $-\infty$

דוגמאות: * **קו ישר:** $\vec{r}:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^n$; $\vec{r}(t)=\vec{OP}+t\vec{u}$, $r_i(t)=p_i+tu_i$

* **אליפסה:** $\vec{r}:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x_0+a\cos t \\ y_0+b\sin t \end{pmatrix}$$

* **ציקלואידה:** נתון גלגל ברדיוס R שעל אחת מנקודותיו מודבק פנס. הגלגל מתגלגל אופקית ללא החלקה. תנו פרמטריזציה לצורה שמצייר האור.



פתרון:

מרכז הגלגל: $x_c(t)=tv_0$, $y_c(t)=R$

$$\omega=\frac{v_0}{R}$$

במערכת מרכז הגלגל:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} tv_0+R\cos\frac{v_0}{R}t \\ R+R\sin\frac{v_0}{R}t \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} x(t)-x_c(t)=R\cos\omega t \\ y(t)-y_c(t)=R\sin\omega t \end{cases}$$

* **קפיץ:** $\vec{r}:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ at \end{pmatrix}$

* **קפיץ מכווץ:** $\vec{r}:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{t} \\ \sin\frac{1}{t} \\ e^t \end{pmatrix}$

גבולות: יהיו $\vec{r}:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ ו-$t_0\in(a,b)$. נאמר שיש ל-$\vec{r}$ גבול ב-t_0 אם קיימת נקודה $p\in\mathbb{R}^n$ כך ש:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\in(a,b): |t-t_0|<\delta \Rightarrow \underbrace{d(\vec{r}(t),p)}_{\|\vec{r}(t)-\vec{p}\|}<\varepsilon$$

אם קיים $\vec{p}$ כזה הוא יחיד ונסמנו ב- $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)$

הערות: * $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}r_1(t),\dots,\lim_{t\to t_0}r_n(t)\right)$

* היינו, סדרות קושי.

בחזרה לקפיץ המכווץ: **תרגיל:** חשבו $\lim_{t\to-\infty}\vec{r}(t)=?$

פתרון:

$$\lim_{t\to-\infty}\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} \lim_{t\to-\infty}\cos\frac{1}{t} \\ \lim_{t\to-\infty}\sin\frac{1}{t} \\ \lim_{t\to-\infty}e^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

משיק: לכל פונקציה כנ"ל $\vec{\Gamma}:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ אם ב-$t_0\in(a,b)$ כל ה-Γ_i גזירות אזי:

$$\vec{\Gamma}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{\Gamma}(t)-\vec{\Gamma}(t_0)}{t-t_0}=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{\Gamma_1(t)-\Gamma_1(t_0)}{t-t_0},\dots\right)=(\Gamma_1'(t_0),\dots,\Gamma_n'(t_0))$$

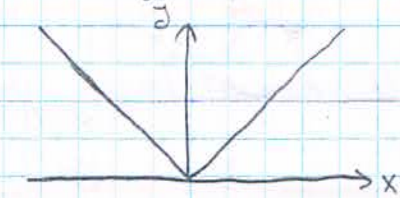
נקרא המשיק של $\vec{\Gamma}$ בזמן t_0.

אם $\vec{\Gamma}$ היא פונקציית המקום של חלקיק בזמן t אז $\vec{\Gamma}'(t)$ הוא וקטור המהירות של החלקיק בזמן t.

תרגיל: שרטטו וחשבו את וקטור המהירות של העקומות הבאות:

$\Gamma:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^2$ (א) $\Gamma(t)=(t,|t|)$ (ב) $\Gamma(t)=(t^3,t^2)$

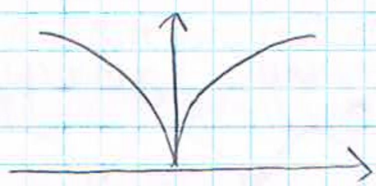
פתרון: (א)



$\Gamma'(t)=(1,\mathrm{sgn}(t))$ $t\neq 0$

ב-$t=0$ Γ לא גזירה.

(ב)



$\Gamma'(t)=(3t^2,2t)$

$\Gamma'(0)=0$

בשתי העקומות יש "שפיצים" אבל מסיבות שונות.

עקומה = התמונה של Γ בשרטוט על הנייר

Γ נקראת גזירה אם היא גזירה לכל t ונקראת רגולרית אם $\vec{\Gamma}'(t)\neq\vec{0}$ לכל t.

נאמר ש-Γ עם פרמטריזציה לפי אורך קשת אם $\|\Gamma'(t)\|=1$ לכל t.

ניתן לשנות פרמטריזציה של מסילה: קח $s:(c,d)\to\mathbb{R}$ כך ש:

(א) s חח"ע (ב) s גזירה עם $s'(t)\neq 0$ לכל t (ג) $s(d)=b,\ s(c)=a$

אז $\Gamma\circ s$ עקומה חדשה שמתארת אותה מסילה רק "עם שעון אחר".

נאמר ש-Γ_1 שקולה ל-Γ_2 אם יש s כנ"ל כך ש-$\Gamma_1=\Gamma_2\circ s$.

דוגמא: $\Gamma_1(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $\Gamma_2(t)=\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$ $\Gamma_3(t)=\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$ $\Gamma_1\sim\Gamma_3\not\sim\Gamma_2$

$\Gamma_1:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ $\Gamma_2:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ $\Gamma_3:(0,\pi)\to\mathbb{R}^2$

הערה: אם $\Gamma'(t)\neq 0$ לכל t $\Leftarrow$ קיימת פרמטריזציה מחדש s כך ש-$\Gamma\circ s$ לפי אורך קשת (הוכחה בהמשך הקורס)

תרגיל: עבור שתי עקומות $\Gamma,\Delta:(a,b)\to\mathbb{R}^n$: $(\Gamma\cdot\Delta)'(t)=\Gamma'(t)\cdot\Delta(t)+\Gamma(t)\cdot\Delta'(t)$

ועבור $s:(c,d)\to\mathbb{R}$ גזירה $(\Gamma\circ s)'(t)=s'(t)\Gamma'(s(t))$

הוכחה: ה. $(\Gamma\cdot\Delta)'(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\Delta_i\right)'(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\Gamma_i'(t)\Delta_i(t)+\Gamma_i(t)\Delta_i'(t)\right]=$

$(\Gamma\circ s)'(t)=\begin{pmatrix}\vdots\\ (\Gamma_i\circ s)'(t)\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\\ \Gamma_i'(s(t))s'(t)\\ \vdots\end{pmatrix}=\dots$

הרחבה: עקמומיות ופיתול:

נניח ש-Γ מסילה עם פרמטריזציה לפי אורך קשת.

לכל t: $\|\Gamma'(t)\|=1$. נניח בנוסף כי $\Gamma''(t)\neq 0$ (כלומר Γ לא ישר)

אז $1=\|\Gamma'(t)\|^2=\Gamma'(t)\cdot\Gamma'(t) \overset{\text{נגזור}}{\rightsquigarrow} 2\Gamma''(t)\cdot\Gamma'(t)=0 \Rightarrow \Gamma''(t)\perp\Gamma'(t)$

נסמן:

$T(t):=\Gamma'(t)$ המשיק של Γ

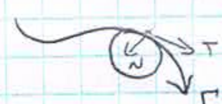
$N(t):=\dfrac{\Gamma''(t)}{\|\Gamma''(t)\|}$ הנורמל של Γ

$\kappa(t):=\|\Gamma''(t)\|$ העקמומיות של Γ

$R(t):=1/\kappa(t)$ רדיוס העקמומיות של Γ

$B(t)=T(t)\times N(t)$ הבינורמל של Γ

באופן מקומי, התנועה של החלקיק היא על מעגל ברדיוס $R(t)$ שמרכזו בכיוון N,



$$B'(t)=\cancel{T'(t)\times N(t)}+T(t)\times N'(t)=T\times N'$$

$$B'\cdot B=(T\times N')\cdot \underbrace{T}_{\text{כמו T}}=0$$

בנוסף $\|B(t)\|=1 \rightsquigarrow B'(t)\perp B(t) \Rightarrow B'\parallel N$ נסמן

$B'(t)=-\tau(t)N(t)$; τ נקרא <u>הפיתול</u> של Γ.

<u>עובדה</u>:

$$\begin{pmatrix}T'\\N'\\B'\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}$$