חדו"א של פונקציות מרובות משתנים - תרגול 13

המשפטים של גאוס וסטוקס.

משפט גאוס - משפט הדיברגנס:

יהי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ תחום סגור וחסום כך שהשפה שלו היא משטח חלק למקוטעין עם נורמל יציאה לפי חוץ. יהיה F שדה וקטורי גזיר ברציפות על V אזי

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\, dV$$

כאשר $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

תרגיל: חשבו $I = \oiint_S x^2\, dy\wedge dz + y^2\, dx\wedge dz + z^2\, dx\wedge dy$

כאשר $S = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2\}$, $R>0$ עם נורמל יציאה לפי חוץ.

פתרון: נסמן $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$:

$$I = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\, dV = \iiint (2x+2y+2z)\, dV$$

$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + r\cos\theta \end{array} \right\} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \left[(a+b+c) + r\sin\theta\,\cancel{(\sin\varphi+\cos\varphi)} + r\cos\theta\right] r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi}\int_0^{R} \left[(a+b+c) + r\cos\theta\right] r^2\sin\theta\, dr\, d\theta =$$

$\int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2}\, d\theta$

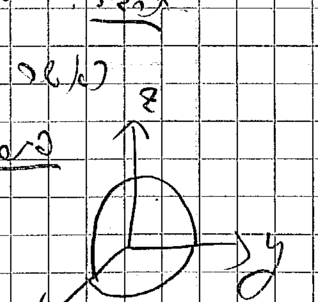
$$= 4\pi \int_0^{\pi} \left[(a+b+c)\frac{R^3}{3}\sin\theta + \frac{R^4}{4}\cos\theta\sin\theta\right] d\theta = \frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$$

$\left. -\frac{\cos 2\theta}{4} \right|_0^{\pi} = 0$

תרגיל: עבור אותה הפונקציה $\vec{F}$, תשבו את האינטגרל $I = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$

כאשר $S = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x,y,z \geq 0 \end{array}\right\}$ (שמינית ספירה)

פתרון: S אינה תוחמת תחום V. נשלים:



$S_1 = \{x^2+y^2 \leq R^2, x,y \geq 0, z=0\}$?

$S_2 = \{x^2+z^2 \leq R^2, x,z \geq 0, y=0\}$

$S_3 = \{y^2+z^2 \leq R^2, y,z \geq 0, x=0\}$

אז $S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \tilde{S}$ תוחם את $V = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \begin{array}{l} x,y,z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \end{array}\right\}$

ולכן

$$\int_S + \sum_i \int_{S_i} = \int_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_V \vec{\nabla}\vec{F}\, dV = 2\iiint_V (x+y+z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} \left(r\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi) + r\cos\theta\right) r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{R^4}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \left[\sin^2\theta(\sin\varphi+\cos\varphi) + \cos\theta\sin\theta\right] d\varphi\, d\theta = \frac{R^4}{2}\int_0^{\pi/2} \left(2\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} + \frac{\pi}{2}\cos\theta\sin\theta\right) d\theta = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi R^4}{16}$$

עכשיו נשאר לחשב $\iint_{S_i}$:

בחירת נורמל: $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1^0} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\,dy = 0$ כנ"ל S_2, S_3

ולכן $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{\pi R^4}{16}$

<u>תרגיל</u>: $\vec{F} = (3xy^2, -y^3 - x, 2z)$ חשבו $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

$S = \{0 \le z \le 1,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$

<u>פתרון</u>: נסגור: $S_1 = \{x^2+y^2 \le 1,\ z = 1\}$ ונקבל $S \cup S_1$

תחום V: $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$

$$\iint_S + \iint_{S_1} = \oiint_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \iiint (3y^2 - 3y^2 + 2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 2\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \int_0^z \rho\,d\rho = 4\pi\int_0^1 \frac{z^2}{2}\,dz = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \begin{pmatrix} 3xy^2 \\ -y^3 - x \\ 2z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2z\rho\,d\rho\,d\varphi\Big|_{z=1}$$ נשים לב שעל S_1:

$$= 4\pi\int_0^1 \rho\,d\rho = 2\pi \Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{4\pi}{3}$$

<u>משפט סטוקס - משפט הרוטור:</u>

יהי S משטח חלק ואוריינטבילי ו-$\vec{n}$ נורמל יחידה רציף, ו-V סגורה שתכיל את S ותהי $\vec{F}$ שדה וקטורי גזיר ב-V, אז

$\vec{n}$ הנורמל למשטח (עם כיוון לפי כלל יד ימין) אז:

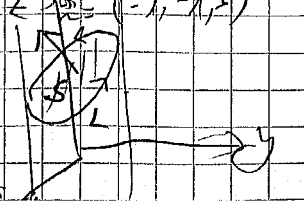
$$\oint_L \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$$

<u>הערה</u>: אם קורא המשפט: המשפט היסודי של החדו"א (ניוטון לייבניץ), גאוס, סטוקס ועוד הם כולם מקרה פרטי של "משפט סטוקס הכללי" שאומר: "$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega$"

<u>תרגיל</u>: חשבו $\oint_L \vec{F}\cdot\vec{dl}$ כאשר L החיתוך של $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z = x+y \end{cases}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$

<u>פתרון</u>: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = (1,1,1)$

$$\oint_L \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_S dS = -$$ $\vec{n} = (-1,-1,1)$



$\vec{r}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho(\cos\varphi+\sin\varphi) \end{pmatrix}$: $\vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ \rho(\cos\varphi-\sin\varphi) \end{pmatrix}$, $\vec{r}'_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi+\sin\varphi \end{pmatrix}$

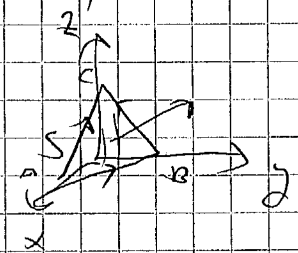
$$\vec{r}'_{\rho} \times \vec{r}'_{\varphi} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi - \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & \rho(\cos\varphi - \sin\varphi) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ -\rho \\ \rho \end{pmatrix}$$

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{3}\rho\, d\rho = 2\sqrt{3}\pi$$

תרגיל: Γ הוא המשולש $ABCA$, $\vec{F} = (x+3y+2z,\ 2x+z,\ x-y)$

חשב $I = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$ כאשר $\begin{cases} A = (2,0,0) \\ B = (0,3,0) \\ C = (0,0,1) \end{cases}$

פתרון: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



S חלק המישור $3x+2y+6z=6$, $\vec{n} = (3,2,6)$

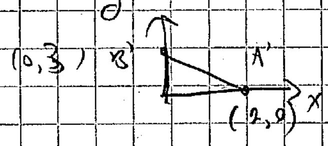
$$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$$

$$\vec{r}'_x = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right),\ \vec{r}'_y = \left(0, 1, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{N} = \vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right),\ \|\vec{N}\| = \frac{7}{6}$$

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}\, ds = \iint_S \frac{1}{7}(-6+2-6)\, ds = -\frac{10}{7}\iint_S ds$$

$$= -\frac{10}{7}\iint_D \frac{7}{6}\, dx\, dy = -5$$



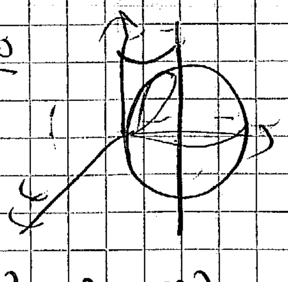
תרגיל: חשב $\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$ כאשר L עקומת החיתוך

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

L: $r < R$, $(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$(x-r)^2 + y^2 = r^2$

פתרון: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ 2z - 2x \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$



$$z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$$

$$z'_x = \frac{R-x}{z},\ z'_y = -\frac{y}{z} \Rightarrow \vec{N} = \left(\frac{x-R}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{N} = 2R\left(1 - \frac{y}{z}\right),\quad D = \{(x-r)^2 + y^2 < r^2\}$$

$$I = \iint_D 2R\left(1 - \frac{y}{z}\right)dx\, dy = 2R\iint_D dx\, dy - 2R\iint_D \frac{y}{z}\, dx\, dy = \ldots = 2\pi R r^2$$