תרגול של פונקציות מרובות משתנים - תרגול 10

אינטגרל מסילתי:

$\vec{F}: U_{\subseteq\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי, $\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה כך ש- $\vec{\gamma}([a,b])\subseteq U$ אז מגדירים:

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{l} = \int_a^b \underbrace{\vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)}_{g(t):[a,b]\to\mathbb{R}}\, dt$$

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{l} = \int_\gamma \sum_{i=1}^n F_i\, dx_i$$

מסמנים גם $\int F_x dx + F_y dy + F_z dz$

דוגמא: חשבו את $\int_\gamma y\,dx + x^2 dy$ כאשר γ מסילה מ-(0,0) ל-(2,4) הבאות:

שימו לב: האינטגרל תלוי במסילה!

(א) $y=2x$

$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$

$\gamma:(0,2)\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(t,2t)$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt = \int_0^2 \left[\begin{pmatrix} y \\ x^2\end{pmatrix}\Big|_{(t,2t)}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}dt = \int_0^2 \begin{pmatrix}2t\\t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}dt = \int_0^2 (2t+2t^2)\,dt = \frac{28}{3}$$

(ב) $y=x^2$:

$\gamma:(0,2)\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(t,t^2)$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^2 \left[\begin{pmatrix} y \\ x^2\end{pmatrix}\Big|_{(t,t^2)}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}dt = \int_0^2 \begin{pmatrix}t^2\\t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}dt = \int_0^2 (t^2+2t^3)\,dt = \frac{32}{3}$$

המטרה: נרצה לבדוק מתי המסילה המקשרת בין שתי הנקודות!

שדה וקטורי $\vec{F}$ משמר אם לכל $P_1,P_2\in U$ ולכל γ_1,γ_2 מסילות מ- P_1 ל- P_2 $\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}$ זה שקול לדרישה:

לכל מסילה סגורה $\gamma\subseteq U$: $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

תרגיל: שדה משמר הוא שדה פוטנציאלי:

"הוכחה": נקבע $\vec{p}\in U$ ולכל $\vec{q}\in U$ נקח מסילה $\gamma_q:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ כך ש- $\gamma_q(0)=\vec{p}$, $\gamma_q(1)=\vec{q}$, $\gamma_q\subseteq U$ ונגדיר

$F(\vec{q}) = \int_{\gamma_q}\vec{F}\cdot d\vec{l}$

(א) F לא תלויה בבחירת ה- γ_q (ולכן מוגדרת היטב)

(ב) $\vec{\nabla}F = \vec{f}$ מהגדרה הפוטנציאל של הדבר.

n=3: להראות: $\vec{f} = \vec{\nabla}F \Rightarrow \nabla\times\vec{f} = \nabla\times(\vec{\nabla}F) = 0$

$\nabla\times\vec{f} = 0 \not\Rightarrow \vec{f}$ משמר (Green פרק)

תרגיל: $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$ לא תלוי בפרמטריזציה

הוכחה: יהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה, $g:[c,d]\to[a,b]$ פרמטריזציה

אזי $\tilde{\gamma}=\vec{\gamma}\circ g$ מסילה.

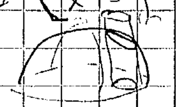
$$\int_{\tilde\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_c^d \vec{F}(\tilde\gamma(t))\cdot\tilde\gamma'(t)\,dt=\int_c^d \vec{F}(\gamma(g(t)))\,\gamma'(g(t))\,g'(t)\,dt=$$

$$\left\{\begin{matrix}s=f(t)\\ f'(t)>0\end{matrix}\right\}=\int_a^b \vec{F}(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

תרגיל: חשבו $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$ כאשר

C העקום הנוצר ע"י החיתוך:

$$\left\{\begin{matrix}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2=ax\end{matrix}\right.\quad z\geq 0$$



$$x^2+y^2=ax \iff x^2-ax+y^2=0 \iff \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

נבחר פרמטריזציה ל- C

$$\left.\begin{matrix}x=\frac{a}{2}(1+\cos\varphi)\\ y=\frac{a}{2}\sin\varphi\end{matrix}\right\}\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi$$

$$z\geq 0\Rightarrow z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\overset{x^2+y^2=ax}{=}\sqrt{a^2-ax}=\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\varphi)}=\sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=a\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_0^{2\pi}\left[\begin{pmatrix}y^2\\ z^2\\ x^2\end{pmatrix}\Big|_{\left(\frac{a}{2}(1+\cos\varphi),\,\frac{a}{2}\sin\varphi,\,a\sin\frac{\varphi}{2}\right)}\right]\cdot\begin{pmatrix}-\frac{a}{2}\sin\varphi\\ \frac{a}{2}\cos\varphi\\ \frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}d\varphi=-\frac{\pi a^3}{4}$$

אם $\vec{F}$ כוח אז $\int_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{l}$ (זו) העבודה שמבצע $\vec{F}$ לאורך γ.

תרגיל: חשבו את העבודה לאורך הכוח

$$\vec{F}=(y-x^2,\ z-y^2,\ x-z^2)$$

לאורך המסילה

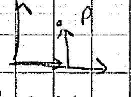
$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3,\quad \gamma(t)=(t,t^2,t^3)$$

פתרון:

$$W=\int_0^1\left[\begin{pmatrix}y-x^2\\ z-y^2\\ x-z^2\end{pmatrix}\Big|_{(t,t^2,t^3)}\right]\cdot(1,2t,3t^2)\,dt=$$

$$\int_\gamma \vec{F}\neq 0\quad\rightarrow\quad=\int_0^1\left[(t^3-t^4)2t+(t-t^6)3t^2\right]dt=\frac{29}{60}$$

תרגיל: מצאו פונקציה פוטנציאל לשדה $\vec{F}=(x^2+2xy-y^2,\ x^2-2xy-y^2)$ במסילה:



פתרון: עבור $(x_0,y_0)=\vec{P}\in\mathbb{R}^2$ נבחר מסילה הבאה: $\gamma:(0,x_0+y_0)\to\mathbb{R}^2$

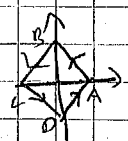
$$\gamma(t)=\left\{\begin{matrix}(t,0) & 0\leq t\leq x_0\\ (x_0,t) & x_0\leq t\leq x_0+y_0\end{matrix}\right.$$

אז:

$$F(P)=\int_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_0^{x_0+y_0}\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{x_0}\left[\begin{pmatrix}x^2+2xy-y^2\\ x^2-2xy-y^2\end{pmatrix}\Big|_{\binom{t}{0}}\right]\cdot\binom{1}{0}dt+\int_{x_0}^{x_0+y_0}\left[\begin{pmatrix}x^2+2xy-y^2\\ x^2-2xy-y^2\end{pmatrix}\Big|_{\binom{x_0}{t}}\right]\cdot\binom{0}{1}dt=$$

$$=\int_0^{x_0}t^2\,dt+\int_{x_0}^{x_0+y_0}\left[x_0^2-2x_0t-t^2\right]dt=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$$



תרגיל: חשבו $\int_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$

$A(1,0),\ B(0,1),\ C(-1,0),\ D(0,-1)$

$\vec{F}\parallel(1,1)$, $\overline{AB},\overline{CD}\perp(1,1)$

$$\int_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\underbrace{\int_{AB}}_{0}+\int_{BC}+\underbrace{\int_{CD}}_{0}+\int_{DA}=\int_0^1\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{|x|+|y|}\\ \frac{1}{|x|+|y|}\end{pmatrix}\Big|_{(-t,1-t)}\right]\cdot\binom{-1}{-1}dt$$

$$+\int_0^1\left[\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\Big|_{(t,-1+t)}\right]\cdot\binom{1}{1}dt=\int_0^1\frac{-2}{t+1-t}dt+\int_0^1\frac{2\,dt}{t+1-t}=-2+2=0$$