עוד קצת אלגברה לינארית (שיעור השלמה בקורס ...)

א) המשפט הספקטרלי:

1) מטריצה ממשית A נקראת סימטרית אם $A = A^T$

אז קיים בסיס אורתונורמלי כך ש- A אלכסונית בו והע"ע שלה ממשיים

2) מטריצה ממשית N נקראת נורמלית אם $N^TN=NN^T$. אז N לכסינה

קיימת מטריצה אורתוגונלית ($V^T=V^{-1}$) כך ש- $VNV^{-1}=VNV^T$

שורותיה של מטריצה אורתוגונלית הן בסיס אורתונורמלי

מסקנה: A סימטרית $\Leftarrow$ A מתלכסנת ע"י מטריצה אורתוגונלית $O(n)$

והע"ע שלה ממשיים

ב) תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית סימטרית היא פונקציה $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

כך שלכל $u,v,w \in V$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

1) $b(u,v) = b(v,u)$

2) $b(\alpha u+\beta v,w) = \alpha b(u,w) + \beta b(v,w)$ (יחד עם 1, b לינארית גם בקואורדינטה השניה)

הערה: b תקרא חיובית אם $b(u,u)\geq 0$ לכל u

ו- $b(u,u)=0 \iff u=0$.

עובדה: בהינתן בסיס $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$ של $\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$b(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^T\, B\, [v]_{\mathcal{B}}$$

כאשר $B=[b]_{\mathcal{B}}$ מטריצה ממשית הנקראת

כך ש- $B_{ij}=b(u_i,u_j)$. B מטריצה סימטרית

לכן כל הע"ע שלה ממשיים

b מ"פ $\iff$ כל הע"ע חיוביים. b המ"פ הסטנדרטית $\iff B=\mathbb{1}_n$.

בהינתן בסיס אחר e ומטריצת מעבר $S=[I]_{\mathcal{B}}^{e}$ מתקיים:

$$b(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^T[b]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = (S[u]_e)^T[b]_{\mathcal{B}}(S[v]_e)$$

$$= [u]_e^T\left(S^T[b]_{\mathcal{B}}S\right)[v]_e$$

לכן $\boxed{[b]_e = S^T[b]_{\mathcal{B}}S}$ נקרא טרנספורמציית חפיפה (בניגוד לדמיון)

אם S אורתוגונלית אז חפיפה = דמיון רגיל.

מכיוון ש- B סימטרית, היא ניתנת ללכסון ע"י מטריצה

אורתוגונלית, לכן ניתן להגיע תמיד למטריצה אלכסונית

משפט ההתמדה של Sylvester:

לכל תבנית בילינארית סימטרית f קיים בסיס B

כך ש- $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix}$. מספר ה-1, ה-1- וה-0 הוא אינווריאנט של f.

f נקראת לא שלילית אם אין (1-)ים.

המעבר בין B האלכסוני לבסיס אחר הוא לא יחיד בהכרח

$$\left.\begin{array}{r} \text{מספר ה-1 = מס' הע"ע החיוביים של } A \\ \text{מספר ה-1- = מס' הע"ע השליליים של } B \\ \text{מספר ה-0 = הריבוי של 0 כע"ע של } B \end{array}\right\}$$

לא משנה באיזה בסיס ניקח, בכל מקרה נקבל

דוגמא: מצאו צורת Sylvester עבור $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

דרך א':

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1-\frac{4}{5} & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

דרך ב': $P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 5-x \end{vmatrix} = x^2-6x+1$ שורשים חיוביים $x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2} = 3\pm\sqrt{8}$ ולכן $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1-\frac{1}{2}C_3} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \dashrightarrow$$

$$\dashrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \dashrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8-9 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$