

---

# MODULES UNIVERSELS DE $GL_3$ SUR UN CORPS $p$ -ADIQUE EN CARACTÉRISTIQUE $p$

par

Rachel Ollivier & Vincent Sécherre

---

**Abstract.** — Let  $F$  be a nonarchimedean locally compact field with fixed uniformizer  $\varpi$  and residue class field  $k$  of characteristic  $p$ . We investigate the structure of certain mod  $p$  universal modules for  $GL_3(F)$  and  $GL_3(F)/\varpi^{\mathbf{Z}}$  over the corresponding Hecke algebras. To this end, we first study the structure of some mod  $p$  universal modules for the finite group  $GL_n(k)$  as modules over the corresponding finite Hecke algebras. We then relate the finite case to the  $p$ -adic one by using homological coefficient systems on the affine Bruhat-Tits building of  $GL_3$ .

Suppose that  $k$  has cardinality  $p$ . We prove that the mod  $p$  universal module of  $GL_3(F)/\varpi^{\mathbf{Z}}$  relative to the standard Iwahori subgroup (that is, the representation compactly induced from the trivial character of the Iwahori subgroup) is projective over the Iwahori-Hecke algebra. We also prove that, if  $p \neq 2$ , the mod  $p$  universal modules of  $GL_3(F)$  and  $GL_3(F)/\varpi^{\mathbf{Z}}$  relative to the standard pro- $p$ -Iwahori subgroup are not flat over the pro- $p$ -Iwahori-Hecke algebra.

## Table des matières

Introduction.....	1
Remerciements.....	4
1. Représentations de $GL_n$ sur un corps fini.....	4
2. Le cas de $GL_2(k)$ .....	11
3. Les foncteurs paraboliques.....	12
4. Le cas de $GL_3(k)$ .....	20
5. Représentations de $GL_n$ sur un corps $p$ -adique.....	26
6. Le cas de $GL_2(F)$ .....	35
7. Le cas de $GL_3(F)$ .....	40
Références.....	45

## Introduction

Désignons par  $F$  un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle  $p$  et de corps résiduel  $k$ . Soit  $n \geq 1$  un entier. Les représentations considérées sont à coefficients dans une clôture algébrique  $\overline{\mathbf{F}}_p$  de  $k$ . Si ce sont des représentations de  $GL_n(F)$ , elles sont de plus lisses. La question de la platitude du module universel relatif à un sous-groupe compact maximal de  $GL_n(F)$  sur l'algèbre de Hecke sphérique a été fructueusement abordée ([2], [17]).

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — Primary: 22E50, 20C08, 20C33 – Secondary: 11F70.

**Mots clefs.** — Modular representations of  $p$ -adic reductive groups, representations of affine Hecke algebras.

Le second auteur est financé en partie par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-08-BLAN-0259-01).

Nous considérons dans cet article le module universel relatif au sous-groupe d'Iwahori standard  $I$  (respectivement à son pro- $p$ -radical  $I_1$ ) de  $GL_n(\mathbb{F})$  en caractéristique  $p$ . Le principal résultat obtenu concerne le cas  $n = 3$ .

Associer à une représentation de  $GL_n(\mathbb{F})$  son espace des invariants sous l'action de  $I_1$  définit un foncteur naturel de la catégorie des représentations de  $GL_n(\mathbb{F})$  vers celle des modules à droite sur l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}$  de  $GL_n(\mathbb{F})$  relative à  $I_1$ . Notons  $\mathcal{C}$  l'induite compacte du caractère trivial de  $I_1$  : c'est une représentation de  $GL_n(\mathbb{F})$  et un  $\mathcal{H}$ -module à gauche que l'on appellera (pro- $p$ ) *module universel*. Via le produit tensoriel d'un  $\mathcal{H}$ -module à droite par  $\mathcal{C}$  au dessus de  $\mathcal{H}$ , on définit un adjoint à gauche  $\mathcal{T}$  du précédent foncteur des pro- $p$ -invariants. L'objet de cet article est d'étudier l'exactitude de cet adjoint, autrement dit la platitude du module universel  $\mathcal{C}$  sur l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}$ . On considèrera également le module universel  $\underline{\mathcal{C}}$ , induite à  $GL_n(\mathbb{F})/\varpi^{\mathbb{Z}}$  du caractère trivial de  $I_1$ . Son algèbre de Hecke sera notée  $\underline{\mathcal{H}}$  et le foncteur correspondant  $\underline{\mathcal{T}}$  associe à un  $\underline{\mathcal{H}}$ -module une représentation de  $GL_n(\mathbb{F})$  avec action triviale de l'uniformisante.

Considérons d'abord le cas  $n = 2$ . Il est prouvé dans [29] que le foncteur  $\mathcal{T}$  est exact si et seulement si le corps résiduel de  $\mathbb{F}$  est de cardinal égal à  $p$ . Quand ce foncteur n'est pas exact, il est donc vain d'espérer que le foncteur des pro- $p$ -invariants fournisse une équivalence entre les  $\mathcal{H}$ -modules et les représentations engendrées par leurs pro- $p$ -invariants (avec action triviale de  $\varpi$ ). Et parmi les candidats restants,  $\mathbb{Q}_p$  est l'unique corps  $\mathbb{F}$  pour lequel cette équivalence de catégories est réalisée (voir [30], et un argument non publié de Paskunas pour le cas des extensions totalement ramifiées de  $\mathbb{Q}_p$ ). En 2004, Vignéras a établi la classification des modules simples de l'algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de  $GL_2(\mathbb{F})$  ([39]), classification qui ne fait pas intervenir la nature du corps  $\mathbb{F}$ . Associée à l'équivalence de catégorie suscitée, cette classification permet de retrouver celle des représentations irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  obtenue par Barthel-Livné et Breuil ([1], [7]).

Passons maintenant au cas général de  $GL_n(\mathbb{F})$ ,  $n \geq 2$ . La combinatoire des modules sur l'algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de  $GL_n(\mathbb{F})$  est désormais bien comprise ([40], [28], [31]). Comme dans le cas  $n = 2$ , la classification des modules simples met en évidence une coïncidence numérique dont les conséquences du côté des représentations de  $GL_n(\mathbb{F})$ ,  $n \geq 3$ , sont encore mystérieuses : les classes d'isomorphismes de modules simples de dimension  $n$  dits *supersinguliers* sont en bijection avec les classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de dimension  $n$  du groupe de Galois absolu de  $\mathbb{F}$  ([31]).

Outre le module universel  $\mathcal{C}$ , définissons l'induite compacte  $\mathcal{C}'$  du caractère trivial du sous-groupe d'Iwahori  $I$  de  $GL_n(\mathbb{F})$  et l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}'$  des endomorphismes de  $\mathcal{C}'$  comme représentation de  $GL_n(\mathbb{F})$ . En quotientant  $\mathcal{C}'$  par l'action de l'uniformisante, on introduit  $\underline{\mathcal{C}'}$ , induite à  $GL_n(\mathbb{F})/\varpi^{\mathbb{Z}}$  du caractère trivial de  $I$ . Son algèbre de Hecke est notée  $\underline{\mathcal{H}'}$ . Pour étudier la platitude des modules universels introduits sur leurs algèbres de Hecke respectives, nous proposons une approche qui souligne que les critères obtenus proviennent des propriétés des objets analogues dans le cas *fini* que nous définissons ci-après. Suivant cette méthode, le résultat principal obtenu est le suivant (voir le paragraphe 7.3).

**Théorème.** — *Supposons que le corps résiduel  $k$  de  $\mathbb{F}$  est de cardinal  $p$  et que  $n = 3$ .*

- (1) *Le module universel  $\mathcal{C}'$  est projectif sur l'algèbre de Hecke-Iwahori  $\mathcal{H}'$ .*
- (2) *Si  $p \neq 2$ , le module universel  $\underline{\mathcal{C}'}$  n'est pas plat sur  $\underline{\mathcal{H}'}$ .*
- (3) *Si  $p \neq 2$ , le module universel  $\mathcal{C}$  n'est pas plat sur  $\mathcal{H}$ .*

Nous conjecturons que, sous les hypothèses du théorème,  $\mathcal{C}'$  est projectif sur  $\mathcal{H}'$ . Par ailleurs, dans le cas où  $p = 2$ , on a  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$  et  $\underline{\mathcal{C}'} = \underline{\mathcal{C}}$ , donc  $\underline{\mathcal{C}}$  est plat sur  $\underline{\mathcal{H}}$  d'après (1).

Remarquons que lorsque l'on travaille avec des représentations complexes, il est connu ([4]) que  $\mathcal{C}'$  est un module plat sur  $\mathcal{H}'$ , et ce quels que soient  $n$  et le cardinal de  $k$ , et le foncteur des I-invariants fournit une équivalence entre la catégorie des représentations de  $GL_n(\mathbb{F})$  engendrées par leurs vecteurs I-invariants et les  $\mathcal{H}$ -modules. On a aussi un résultat similaire en remplaçant  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{H}$  et I par  $\mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{H}'$  et  $I_1$ .

Décrivons maintenant la méthode suivie pour démontrer le théorème. On note  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $\mathbb{F}$ , dont nous avons choisi une uniformisante  $\varpi$ , et  $q$  le cardinal du corps résiduel  $k$ , qui est une puissance de  $p$ . Soit  $K$  le sous-groupe compact maximal  $GL_n(\mathcal{O})$  de  $GL_n(\mathbb{F})$ . Par réduction modulo  $\varpi$ , on dispose d'un morphisme surjectif de  $K$  dans le groupe réductif fini  $GL_n(k)$ . Soit  $B$  le sous-groupe de Borel de  $GL_n(k)$  des matrices triangulaires supérieures et  $U$  son radical unipotent. Les images inverses de  $B$  et  $U$  dans  $K$  par la réduction modulo  $\varpi$  sont respectivement le sous groupe d'Iwahori  $I$  de  $GL_n(\mathbb{F})$  et son pro- $p$  sous-groupe de Sylow  $I_1$ . On note respectivement  $C$  et  $C'$  l'induite à  $GL_n(k)$  du caractère trivial de  $U$  et de celui de  $B$ , et  $H$  et  $H'$  les algèbres de Hecke de leurs  $GL_n(k)$ -endomorphismes. Les parties 1 à 4 de cet article étudient certaines catégories de représentations modulo  $p$  de  $GL_n(\mathbb{F})$  et explorent la dialectique entre représentations et modules sur l'algèbre de Hecke dans ce cas dit *fini*.

Une classification des représentations irréductibles modulo  $p$  de  $GL_n(k)$  est donnée par [14] : toute représentation irréductible  $y$  est explicitée comme quotient de la représentation universelle  $C$  ; de plus, le foncteur qui à une représentation associe son sous-espace  $U$ -invariant induit une bijection entre les représentations irréductibles de  $GL_n(k)$  et les  $H$ -modules simples. Restreignons ce foncteur des  $U$ -invariants à la sous-catégorie pleine  $\mathcal{E}$  des représentations (de dimension finie) engendrées par leurs vecteurs  $U$ -invariants et notons-le alors  $\mathcal{F}$ . Comme dans le cas  $p$ -adique évoqué plus haut, le produit tensoriel par  $C$  au dessus de  $H$  permet de définir un adjoint à gauche de  $\mathcal{F}$  que l'on note  $\mathcal{T}$ . En s'appuyant sur un résultat de [12] qui exploite la propriété d'auto-injectivité de l'algèbre de Hecke finie  $H$ , on démontre que  $\mathcal{F}$  est une équivalence de catégories si et seulement si  $\mathcal{T}$  est un foncteur exact (proposition 1.18). Nos résultats sont réunis dans le théorème suivant (voir la proposition 4.16).

**Théorème.** — *On a les résultats suivants.*

- (1) *Pour  $n = 2$ , le  $H'$ -module  $C'$  est plat.*
- (2) *Pour  $n = 2$ , le  $H$ -module  $C$  est plat si et seulement si  $q = p$ .*
- (3) *Pour  $n = 3$ , le  $H'$ -module  $C'$  est plat si et seulement si  $q = p$ .*
- (4) *Pour  $n = 3$ , le  $H$ -module  $C$  est plat si et seulement si  $q = 2$ .*
- (5) *Pour  $n \geq 4$  et  $q \neq p$ , le  $H'$ -module  $C'$  n'est pas plat.*
- (6) *Pour  $n \geq 4$  et  $q \neq 2$ , le  $H$ -module  $C$  n'est pas plat.*

Pour  $n \geq 4$  et  $q = p$ , nous n'avons pas de résultat sur  $C'$ . Les cas de  $n = 2$  et  $n = 3$  sont traités directement en travaillant sur les suites de décompositions des séries principales. Le cas de  $n \geq 4$  s'en déduit par un processus d'induction parabolique, en étudiant le module universel et l'algèbre de Hecke relatifs à un sous-groupe de Lévi standard  $M$  de  $GL_n(k)$  (corollaire 3.21). En étudiant le  $H'$ -module  $C'$ , on montre cependant que pour  $n = 3$  et  $q = p$ , le foncteur  $\mathcal{F}$  induit une équivalence entre les représentations (de dimension finie) de  $GL_3(k)$  engendrées par leurs  $B$ -invariants et les  $H'$ -modules (de dimension finie). Ce résultat sera le point de départ de la preuve du point (1) du théorème principal.

La partie 5 établit le premier pas du passage du cas fini au cas  $p$ -adique. On note  $K_1$  le sous-groupe de congruence de  $K$  des matrices égales à l'identité modulo  $\varpi$ . On démontre que le  $\mathcal{H}$ -module à gauche  $\mathcal{C}^{K_1}$  des  $K_1$ -invariants de  $\mathcal{C}$  est plat (et même projectif) si et seulement si  $C$  est un  $H$ -module plat (proposition 5.21). Plus généralement, on déduit de l'étude de  $H$ -modules

de la forme  $\mathcal{C}^N$  (où  $N$  est un sous-groupe de  $U$ ) des critères de platitude pour les  $\mathcal{H}$ -modules à gauche de la forme  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  (où  $\mathcal{N}$  est le sous-groupe de  $K_1$  image réciproque de  $N$  par réduction modulo  $\varpi$ ).

Les parties 6 et 7 sont respectivement consacrées à l'étude de la platitude des modules universels  $p$ -adiques pour  $GL_2(\mathbb{F})$  et  $GL_3(\mathbb{F})$ . Elles reposent de façon essentielle sur un résultat de Schneider et Stuhler ([34]) qui nous assure que le  $\mathcal{H}$ -module universel  $\mathcal{C}$  est l'homologie de niveau 0 du système de coefficients  $\mathcal{H}$ -équivariant sur l'immeuble qui lui est naturellement associé. Ainsi, on dispose d'une résolution de  $\mathcal{C}$  par des sommes directes de copies de  $\mathcal{H}$ -modules à gauche de la forme  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  dont nous savons déterminer la platitude par la partie 5.

On établit dans la partie 6 que pour  $n = 2$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}$  est plat si et seulement si  $q = p$  auquel cas il est même projectif ; et que  $\mathcal{C}'$  est  $\mathcal{H}'$ -projectif quel que soit  $q$ . Dans les cas favorables, notons que ces résultats impliquent les cas favorables de [29] qui traite des modules  $\underline{\mathcal{C}}$  et  $\underline{\mathcal{C}'}$ . Ajoutons que lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$ , le résultat de Schneider et Stuhler, associé à l'équivalence de catégories entre représentations et modules suscitée, permet de donner une autre preuve de l'existence d'une *présentation standard* pour les représentations admissibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , résultat prouvé pour la première fois par Colmez ([16]) (également prouvé dans [9], [41], [22], [18]).

Dans la partie 7, on exploite les résultats de la partie 5 et une propriété fine de la combinatoire des sommets de l'immeuble affine de  $GL_3(\mathbb{F})$  exhibée dans [2] pour prouver le théorème annoncé.

## Remerciements

Nous remercions Shaun Stevens, Marc Cabanes et Florian Herzig pour de fructueuses discussions à propos de ce travail.

Le second auteur remercie l'University of East Anglia pour son accueil et son soutien financier (EPSRC grant GR/T21714/01). Il remercie aussi l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille 2 et l'Institut de Mathématiques de Luminy où la majeure partie de ce travail a été réalisée.

Le premier auteur remercie le Laboratoire de Mathématiques de Versailles qui lui a fourni un cadre de travail chaleureux et dynamisant durant la gestation de cet article. Un séjour au *Radcliffe Institute for advanced Study* à l'université de Harvard au printemps 2010 lui a également offert une alliance de calme et de stimulation qui fut propice à la finalisation de plusieurs arguments de cet article.

## 1. Représentations de $GL_n$ sur un corps fini

### 1.1. Catégories de représentations

Soit  $p$  un nombre premier, soit  $k$  un corps fini de caractéristique  $p$  et soit  $\overline{\mathbb{F}}_p$  une clôture algébrique de  $k$ . Étant donné un entier  $n \geq 1$ , on pose  $G = GL_n(k)$ , et on note  $U$  le sous-groupe de  $G$  constitué des matrices unipotentes supérieures, qui est un  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $G$ .

Dans cette section, et ce jusqu'à la fin de la section 4, par *représentation* on entend représentation de dimension finie à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

**Définition 1.1.** — On note  $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G)$ , ou plus simplement  $\mathcal{R}$ , la catégorie des représentations de  $G$  (qui sont de dimension finie et à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$ ), et on note  $\mathcal{E}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  constituée des représentations engendrées par leurs vecteurs  $U$ -invariants.

Étant données des représentations  $V_1, V_2$  dans  $\mathcal{R}$ , on note  $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$  l'espace des homomorphismes de représentations de  $V_1$  dans  $V_2$ , c'est-à-dire l'espace des applications  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -linéaires  $G$ -équivariantes de  $V_1$  dans  $V_2$ . On note  $\text{End}_G(V_1)$  la  $R$ -algèbre des endomorphismes de  $V_1$ .

Le résultat classique suivant est essentiel dans l'étude de la catégorie  $\mathcal{R}$ . Si  $V$  est une représentation de  $G$ , on note  $V^U$  l'espace de ses vecteurs  $U$ -invariants. (Pour une preuve, on renvoie à [36], paragraphe 8.3, proposition 26.)

**Lemme 1.2.** — *Pour toute représentation  $V$  dans  $\mathcal{R}$ , on a  $V^U = 0$  si et seulement si  $V = 0$ .*

On note  $C$  la représentation de  $G$  induite à partir du caractère trivial de  $U$ . Il s'agit de l'espace des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont invariantes par translations à gauche par  $U$ , muni de l'action de  $G$  par translations à droite. C'est une représentation appartenant à  $\mathcal{E}$ , puisqu'engendrée par la fonction caractéristique de  $U$ , notée  $\mathbf{1}_U$ , qui est  $U$ -invariante. (Plus généralement, étant donnée une partie  $X$  de  $G$ , on note  $\mathbf{1}_X$  sa fonction caractéristique.)

Si  $V$  est une représentation de  $G$  et si  $f \in \text{Hom}_G(C, V)$ , le vecteur  $f(\mathbf{1}_U)$  est invariant par  $U$ . En outre, l'application  $f \mapsto f(\mathbf{1}_U)$  est un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels de  $\text{Hom}_G(C, V)$  dans  $V^U$  (réciprocité de Frobenius). On a le résultat suivant.

**Lemme 1.3.** — *Une représentation de  $G$  appartient à  $\mathcal{E}$  si et seulement s'il existe un entier  $b \geq 1$  tel qu'elle soit isomorphe à un quotient de  $C^b$ .*

*Démonstration.* — Soit  $V$  une représentation de  $G$ , et soit  $b \geq 1$  un entier. Par réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels :

$$\text{Hom}_G(C^b, V) \rightarrow (V^U)^b$$

associant à tout homomorphisme de  $C^b$  dans  $V$  une famille de  $b$  vecteurs  $U$ -invariants de  $V$ , et un tel homomorphisme est surjectif si et seulement si la famille qui lui correspond engendre  $V$  comme représentation de  $G$ .  $\square$

**Remarque 1.4.** — La sous-catégorie  $\mathcal{E}$  est stable par quotients dans  $\mathcal{R}$ . On verra plus loin qu'elle n'est pas toujours stable par sous-objets dans  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire qu'une sous-représentation dans  $\mathcal{R}$  d'un objet de  $\mathcal{E}$  n'appartient pas toujours à  $\mathcal{E}$ .

Si  $V$  est dans  $\mathcal{R}$ , on désigne par  $V^\dagger$  la sous-représentation de  $V$  engendrée par  $V^U$ . Elle est dans  $\mathcal{E}$ , et l'espace de ses vecteurs  $U$ -invariants est égal à  $V^U$ . Le lemme suivant compare les notions de noyau et d'image dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{E}$ .

**Lemme 1.5.** — *Soient  $V_1, V_2$  des représentations dans  $\mathcal{E}$ . Tout homomorphisme de représentations  $f \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$  a un noyau et une image dans  $\mathcal{E}$ , et on a :*

$$\text{Ker}_{\mathcal{E}}(f) = \text{Ker}_{\mathcal{R}}(f)^\dagger \quad \text{et} \quad \text{Im}_{\mathcal{E}}(f) = \text{Im}_{\mathcal{R}}(f).$$

*Démonstration.* — Puisque  $\text{Im}_{\mathcal{R}}(f)$  est un quotient de  $V_1$  et que  $V_1$  est dans  $\mathcal{E}$ , le lemme 1.3 implique que  $\text{Im}_{\mathcal{R}}(f)$  est dans  $\mathcal{E}$ , ce qui donne la seconde égalité.

Pour la première égalité, il suffit de vérifier que si  $V$  est une sous-représentation de  $\text{Ker}_{\mathcal{R}}(f)$  engendrée par  $V^U$ , alors  $V$  est en fait une sous-représentation de  $\text{Ker}_{\mathcal{E}}(f)^\dagger$ .  $\square$

**Corollaire 1.6.** — *Soient  $V_1$  dans  $\mathcal{E}$  et  $V_2$  dans  $\mathcal{R}$ . On a un isomorphisme canonique :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(V_1, V_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{E}}(V_1, (V_2)^\dagger)$$

de  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels.

*Démonstration.* — Soit  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(V_1, V_2)$ . On a l'inclusion  $\text{Im}_{\mathcal{R}}(f)^\dagger \subseteq (V_2)^\dagger$ , ce qui entraîne l'inclusion  $\text{Im}_{\mathcal{E}}(f) \subseteq (V_2)^\dagger$  d'après le lemme 1.5.  $\square$

En d'autres termes, le foncteur  $V \mapsto V^\dagger$  est adjoint à droite au foncteur d'inclusion de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{R}$ .

Étant donnée une représentation  $V$  de  $G$ , on note  $V^\vee$  sa représentation contragrédiente. Le foncteur  $V \mapsto V^\vee$  est exact de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Lemme 1.7.** — *La représentation  $C$  est isomorphe à sa contragrédiente.*

*Démonstration.* — Si l'on identifie  $C$  à l'espace des fonctions de  $U \backslash G$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$ , l'espace dual est engendré par les fonctions d'évaluation  $\text{ev}(x) : f \mapsto f(x)$ , pour  $x \in U \backslash G$ . On vérifie que :

$$g \cdot \text{ev}(x) = \text{ev}(xg^{-1}),$$

pour tout  $g \in G$ , de sorte que l'homomorphisme  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -linéaire  $\mathbf{1}_x \mapsto \text{ev}(x)$ , associant à la fonction caractéristique  $\mathbf{1}_x$  de la classe  $x \in U \backslash G$  sa fonction d'évaluation, est un isomorphisme de représentations de  $G$ .  $\square$

On vérifie au moyen des lemmes 1.3 et 1.7 qu'une représentation de  $\mathcal{R}$  appartient à  $\mathcal{E}$  si et seulement s'il existe un entier  $b \geq 1$  tel que sa représentation contragrédiente soit isomorphe à une sous-représentation de  $C^b$ .

**Définition 1.8.** — On note  $\mathcal{B}$  la plus grande sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}$  qui soit stable par le foncteur  $V \mapsto V^\vee$ .

D'après ce qui précède,  $\mathcal{B}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  constituée des représentations qui sont à la fois quotients et sous-représentations de  $C^b$  pour un entier  $b \geq 1$  assez grand, ou encore, si l'on préfère, des représentations images d'un élément de  $\text{End}_G(C^b)$  pour un entier  $b \geq 1$ .

Si  $V$  est dans  $\mathcal{E}$ , on désigne par  $V^\ddagger$  le plus grand quotient de  $V$  appartenant à  $\mathcal{B}$ , qui s'identifie à  $V^{\vee\vee}$ . Le foncteur  $V \mapsto V^\ddagger$  est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$ .

## 1.2. L'algèbre de Hecke

On note :

$$H = \text{End}_G(C)$$

la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre des  $G$ -endomorphismes de  $C$ . Par réciprocity de Frobenius, elle s'identifie canoniquement à l'espace  $C^U$  des fonctions de  $G$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$  invariantes par  $U$  par translations à droite et à gauche, muni du produit de convolution d'unité  $\mathbf{1}_U$ .

Soient  $T$  le tore déployé de  $G$  composé des matrices diagonales et  $B$  le sous-groupe de Borel standard composé des matrices triangulaires supérieures de  $G$ . On note  $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$  l'ensemble des racines (décomposé en racines positives et négatives) et  $\Pi$  l'ensemble des racines simples. On note  $W_0$  le sous-groupe de  $G$  constitué des matrices de permutation. C'est un groupe de Coxeter de système générateur  $S_0 = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ , où  $s_i$  désigne, pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , la transposition entre  $i$  et  $i+1$ . On note :

$$\ell_0 : W_0 \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

l'application longueur qui lui correspond. Le groupe  $W_0$  agit naturellement sur l'ensemble des racines  $\Phi$ , et l'on désignera par  $w \cdot \alpha$  la racine conjuguée de  $\alpha \in \Phi$  par  $w \in W_0$ . L'entier  $\ell_0(w)$  est le nombre de racines positives rendues négatives par l'action de  $w$ , c'est-à-dire le cardinal de  $(w \cdot \Phi^+) \cap \Phi^-$ . On note :

$$W = W_0 \rtimes T$$

le produit semi-direct de  $W_0$  par  $T$  (où  $W_0$  agit sur  $T$  par conjugaison). On définit une action de  $W$  sur  $\Phi$ , ainsi qu'une application longueur  $\ell$  sur  $W$ , par inflation à partir de celles sur  $W_0$ . Les éléments de longueur nulle de  $W$  sont donc exactement les éléments de  $T$ . Le groupe  $W$  est

un système de représentants des doubles classes de  $G$  modulo  $U$ . En particulier, les fonctions caractéristiques :

$$(1.1) \quad \tau_w = \mathbf{1}_{UwU}, \quad w \in W,$$

forment une base de  $H$  comme  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel, et on a :

$$(1.2) \quad UwUw'U = Uww'U \Leftrightarrow \tau_w \tau_{w'} = \tau_{ww'} \Leftrightarrow \ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$$

pour tous  $w, w' \in W$ . L'ensemble  $\{\tau_s, \tau_t \mid s \in S_0, t \in T\}$  constitue donc un système générateur de la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $H$ .

On note  $\mathcal{M}(H)$ , ou plus simplement  $\mathcal{M}$ , la catégorie des modules à droite de type fini sur  $H$ . Si  $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$  sont deux modules dans  $\mathcal{M}$ , on note  $\text{Hom}_H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$  l'espace des homomorphismes de  $H$ -modules à droite de  $\mathfrak{m}_1$  dans  $\mathfrak{m}_2$ . On a un foncteur :

$$(1.3) \quad V \mapsto \text{Hom}_G(C, V)$$

de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{M}$ , admettant un adjoint à gauche défini par :

$$(1.4) \quad \mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_H C,$$

où  $C$  est considéré à la fois comme un  $H$ -module à gauche (de type fini) et une représentation de  $G$ . L'espace  $\text{Hom}_G(C, V)$  s'identifie à l'espace  $V^U$  des vecteurs  $U$ -invariants de  $V$  et, si  $\varphi$  est un homomorphisme entre deux représentations  $V_1, V_2$  de  $\mathcal{R}$ , il lui correspond l'application  $H$ -linéaire de  $(V_1)^U$  dans  $(V_2)^U$  induite par restriction.

Dorénavant, on se cantonne à l'étude de la catégorie  $\mathcal{E}$ , et on note  $\mathcal{F}$  la restriction de (1.3) à  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire le composé de (1.3) avec le foncteur d'inclusion de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Lemme 1.9.** — *Le foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  est fidèle.*

*Démonstration.* — Soient  $V_1, V_2$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\varphi$  un homomorphisme de  $V_1$  dans  $V_2$  tel que  $\mathcal{F}(\varphi) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $\varphi$  soit trivial sur  $(V_1)^U$ . Il l'est donc également sur la sous-représentation de  $V_1$  engendrée par  $(V_1)^U$ , qui est égale à  $V_1$  par hypothèse. En conclusion, on a  $\varphi = 0$ , ce dont on déduit que  $\mathcal{F}$  est fidèle.  $\square$

**Remarque 1.10.** — Soit  $V$  une représentation de  $G$ . Par adjonction, il correspond à l'identité de  $\text{Hom}_H(V^U, V^U)$  un homomorphisme  $V^U \otimes_H C \rightarrow V$  de représentations de  $G$ , dont l'image est égale à la représentation  $V^\dagger$  définie au paragraphe 1.1.

On note  $\mathcal{J}$  l'adjoint à gauche de  $\mathcal{F}$ , de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{E}$ , défini par (1.4).

Concentrons-nous momentanément sur la catégorie  $\mathcal{B}$ . On note  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$  la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire le composé de  $\mathcal{F}$  et du foncteur d'inclusion de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$ . Il admet un adjoint à gauche  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ , qui est le composé de  $\mathcal{J}$  et du foncteur  $V \mapsto V^\dagger$ , et qui n'est pas toujours égal à  $\mathcal{J}$ .

**Remarque 1.11.** — Puisque la dualité  $V \mapsto V^\vee$  préserve l'irréductibilité et que toute représentation irréductible de  $G$  est engendrée par ses vecteurs  $U$ -invariants (voir le lemme 1.2), toute représentation irréductible de  $G$  est dans  $\mathcal{B}$ .

D'après [12, Proposition 6.11], la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $H$  est une algèbre de Frobenius. En particulier,  $H$  est auto-injective et on a les propriétés suivantes.

**Lemme 1.12.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $H$ -module (à droite ou à gauche) de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathfrak{m}$  est plat.
- (2)  $\mathfrak{m}$  est projectif.

(3)  $\mathfrak{m}$  est injectif.

*Démonstration.* — De façon générale, tout module projectif est plat. L'implication réciproque provient de [26, Theorem 4.38] et du fait que  $H$  est noethérien. L'équivalence entre (2) et (3) est donnée par [3, Proposition 1.6.2].  $\square$

**Corollaire 1.13.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $H$ -module (à droite ou à gauche) et soit  $\mathfrak{n}$  un sous-module projectif de type fini de  $\mathfrak{m}$ . Alors  $\mathfrak{n}$  est un facteur direct de  $\mathfrak{m}$ .*

Signalons que, si  $G'$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $C^{G'}$  est un sous- $H$ -module à gauche de  $C$ .

**Corollaire 1.14.** — *Soit  $U'$  un sous-groupe de  $U$ . Alors le  $H$ -module à gauche  $C^U \simeq H$  est un facteur direct de  $C^{U'}$ . En particulier, c'est un facteur direct de  $C$ .*

Le théorème suivant est dû à Cabanes et Enguehard (voir [12, Theorem 1.25]).

**Théorème 1.15 (Cabanes-Enguehard).** — *Le foncteur  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$  est une équivalence de catégories entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{M}$ .*

Plus précisément, on a la propriété suivante (voir [12, Lemma 1.26]).

**Fait 1.16.** — *Pour tout  $H$ -module à droite de type fini  $\mathfrak{m}$ , il existe un homomorphisme injectif de  $\mathfrak{m}$  dans  $H^d$ , pour un entier  $d \geq 1$  convenable.*

Étant donné un  $H$ -module à droite de type fini  $\mathfrak{m}$ , on choisit un entier  $d \geq 1$  et un homomorphisme injectif  $\iota$  de  $\mathfrak{m}$  dans  $H^d$ . Ceci permet d'identifier  $\mathfrak{m}$  à un sous-espace de  $\text{Hom}_G(C, C^d)$ , et de former l'image de l'application naturelle :

$$\mathfrak{m} \otimes_H C \rightarrow H^d \otimes_H C \simeq C^d,$$

qu'on note  $V = V(\mathfrak{m}, \iota)$ . On a le résultat suivant (voir [12, Lemma 1.27]).

**Fait 1.17.** — *La représentation  $V$  est dans  $\mathcal{B}$ , sa classe d'isomorphisme ne dépend pas de  $\iota$  et le  $H$ -module à droite  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(V)$  est isomorphe à  $\mathfrak{m}$ .*

### 1.3. Critères de platitude

Le foncteur  $\mathcal{F}$  est fidèle et essentiellement surjectif (voir le lemme 1.9, la seconde assertion découlant par exemple du théorème 1.15). Nous établissons des conditions pour que, de surcroît, il soit plein.

**Proposition 1.18.** — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) le foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  est plein ;
- (2) le foncteur  $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  est exact ;
- (3) les catégories  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  coïncident ;
- (4) le  $H$ -module à gauche  $C$  est plat ;
- (5) le  $H$ -module à gauche  $C$  est projectif ;
- (6) le foncteur  $\mathcal{F}$  est une équivalence de catégories de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{T}$  en est un quasi-inverse.

*Démonstration.* — (3  $\Rightarrow$  1, 2) On suppose que les catégories  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  coïncident. Alors le foncteur  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$  est une équivalence de catégories, de sorte que son adjoint  $\mathcal{T}$  est exact et  $\mathcal{F}$  est plein.

(1  $\Rightarrow$  3) On suppose que  $\mathcal{F}$  est plein. Si  $V$  est dans  $\mathcal{E}$ , alors il existe un homomorphisme injectif de  $H$ -modules de  $\mathcal{F}(V)$  dans  $H^d$  pour un entier  $d \geq 1$  (voir le fait 1.16). Cet homomorphisme est de la forme  $\mathcal{F}(\varphi)$  pour  $\varphi \in \text{Hom}_G(V, C^d)$ , et il reste à voir que  $\varphi$  est injectif. Par hypothèse, la restriction  $\mathcal{F}(\varphi)$  de  $\varphi$  à  $V^U$  est injective, de sorte que  $\text{Ker}_{\mathcal{B}}(\varphi)^U$  est trivial. On en déduit que  $\text{Ker}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  est trivial (voir le lemme 1.2), c'est-à-dire que  $\varphi$  est injectif, donc que  $V$  est dans  $\mathcal{B}$ .



(2  $\Rightarrow$  3) On suppose que  $\mathcal{T}$  est exact. D'après le fait 1.16, pour tout  $H$ -module à droite de type fini  $\mathfrak{m}$ , on a un homomorphisme injectif de  $\mathfrak{m}$  dans  $H^d$  pour un entier  $d \geq 1$ . En appliquant  $\mathcal{T}$ , on obtient un homomorphisme injectif de représentations de  $G$  de  $\mathcal{T}(\mathfrak{m})$  dans  $C^d$ , ce qui prouve que  $\mathcal{T}$  est à valeurs dans  $\mathcal{B}$ . Il s'agit donc de l'adjoint de  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ , qui est une équivalence de catégories d'après le théorème 1.15. Étant donné  $V$  dans  $\mathcal{E}$ , on a une suite exacte dans  $\mathcal{R}$  :

$$(1.5) \quad 0 \rightarrow Q \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F}(V) = V^U \otimes_H C \rightarrow V \rightarrow 0,$$

où  $Q$  désigne le noyau de la projection canonique de  $\mathcal{T}\mathcal{F}(V)$  sur  $V$ . Puisque  $\mathcal{T}$  est à valeurs dans  $\mathcal{B}$ , le foncteur  $\mathcal{F}\mathcal{T}$  est isomorphe au foncteur identité de  $\mathcal{M}$ , de sorte que, en appliquant  $\mathcal{F}$  à (1.5), on obtient la suite exacte de  $H$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V),$$

où l'homomorphisme de droite est l'identité. On en déduit que  $\mathcal{F}(Q)$ , donc  $Q$ , est trivial. Ainsi  $\mathcal{T}\mathcal{F}(V)$  est canoniquement isomorphe à  $V$ , donc  $V$  est dans  $\mathcal{B}$ .

(2  $\Leftrightarrow$  4) Si  $C$  est plat comme  $H$ -module, alors le foncteur de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{R}$  défini par (1.4) est exact, donc  $\mathcal{T}$  est exact. Inversement, si  $\mathfrak{n}$  est un  $H$ -module à droite et  $\mathfrak{m}$  un sous-module de  $\mathfrak{n}$ , on a un homomorphisme :

$$(1.6) \quad \mathfrak{m} \otimes_H C \rightarrow \mathfrak{n} \otimes_H C$$

dans  $\mathcal{R}$ . Si  $\mathcal{T}$  est exact, alors le noyau de (1.6) dans  $\mathcal{E}$  est trivial, ce qui équivaut à dire que son noyau dans  $\mathcal{R}$  est trivial (voir le lemme 1.5). Le foncteur (1.4) est donc exact, c'est-à-dire que  $C$  est plat comme  $H$ -module à gauche.

(4  $\Leftrightarrow$  5) C'est une conséquence du lemme 1.12.  $\square$

**Remarque 1.19.** — On peut ajouter à la proposition 1.18 les assertions équivalentes suivantes :

- (7) la représentation  $C$  est quasi-projective de type fini [38] ;
- (8) la sous-catégorie  $\mathcal{E}$  est stable par sous-objets dans  $\mathcal{R}$ .

Rappelons que  $C$  est quasi-projective comme représentation de  $G$  si, pour tout homomorphisme surjectif  $\varphi \in \text{Hom}_G(C, V)$ , l'homomorphisme  $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_H(H, V^U)$  qui s'en déduit est surjectif. D'après le lemme 1.2, la représentation  $C$  est sans  $C$ -torsion dans la terminologie de [38], c'est-à-dire que, pour toute sous-représentation non nulle  $V$  de  $C$ , le  $H$ -module  $\mathcal{F}(V)$  est non nul. On déduit du théorème 9 de l'appendice de [38] que les conditions (1) et (7) sont équivalentes.

D'autre part, si les catégories  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  coïncident, alors  $\mathcal{E}$  est stable par sous-objets dans  $\mathcal{R}$  puisque c'est le cas de  $\mathcal{B}$ . Inversement, si  $\mathcal{E}$  est stable par sous-objets dans  $\mathcal{R}$ , la conjonction de la proposition 2 et du théorème 4 de l'appendice de [38] implique la condition (1).

Dès que le  $H$ -module  $C$  n'est pas plat, il y a donc des représentations dans  $\mathcal{E}$  qui ne sont pas dans  $\mathcal{B}$ . On en donne un exemple à la proposition 2.3.

#### 1.4. Décomposition de $C$ et de $H$

Rappelons que  $B$  désigne le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de  $G$  et notons  $\hat{T}$  le groupe des  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractères du tore  $T$ . Par transitivité de l'induction, la représentation  $C$  de  $G$  se décompose sous la forme :

$$(1.7) \quad C = \bigoplus_{\chi \in \hat{T}} C_{\chi},$$

où  $C_{\chi}$  désigne la représentation de  $G$  induite à partir du caractère de  $B$  obtenu en composant  $\chi$  avec la surjection canonique de  $B$  sur  $T$ . (Il s'agit de la représentation de  $G$  par translations à droite sur l'espace des fonctions  $f$  de  $G$  dans  $\mathbf{R}$  qui vérifient  $f(tug) = \chi(t)f(g)$  pour tous  $t \in T$ ,

$u \in U, g \in G$ .) On note  $\varepsilon_\chi$  la projection de  $C$  sur  $C_\chi$  définie par (1.7). La famille des  $\varepsilon_\chi$ , pour  $\chi \in \hat{T}$ , est une famille d'idempotents orthogonaux de  $H$  qui décomposent l'unité  $\mathbf{1}_U \in H$ .

Le résultat suivant est dû à Carter-Lusztig [14].

**Proposition 1.20** ([14]). — *Soit  $V$  une représentation irréductible de  $G$ .*

- (1) *Il existe un unique caractère  $\chi$  de  $T$  tel que  $V$  soit isomorphe à un quotient de  $C_\chi$ .*
- (2) *L'espace des vecteurs  $U$ -invariants de  $V$  est de dimension 1 et la représentation de  $T$  sur  $V^U$  est égale à  $\chi$ .*

Pour  $w \in W_0$  et  $\chi \in \hat{T}$ , on note  $\chi^w$  le caractère de  $T$  défini par  $t \mapsto \chi(wtw^{-1})$ . Ceci définit une action de  $W_0$  sur  $\hat{T}$ . On note  $\Gamma$  l'ensemble des orbites de  $\hat{T}$  sous l'action de  $W_0$ . Si  $\gamma$  est une telle orbite, on note  $\varepsilon_\gamma$  la somme des  $\varepsilon_\chi$  pour  $\chi \in \gamma$ .

**Remarque 1.21.** — (1) On vérifie que  $\varepsilon_\chi$  se décompose dans la base (1.1) sous la forme :

$$(1.8) \quad \varepsilon_\chi = (-1)^n \sum_{t \in T} \chi(t) \tau_t$$

et qu'on a l'égalité  $\varepsilon_\chi \tau_t = \chi(t)^{-1} \varepsilon_\chi$  pour tout  $t \in T$ .

(2) Pour tous  $\chi \in \hat{T}$  et  $s \in S_0$ , on a  $\tau_s \varepsilon_{\chi^s} = \varepsilon_\chi \tau_s$  et, d'après [14, Theorem 4.4], on a :

$$(1.9) \quad \tau_s^2 \varepsilon_\chi = \begin{cases} -\tau_s \varepsilon_\chi & \text{si } \chi^s = \chi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) L'ensemble  $\{\tau_s, \varepsilon_\chi \mid s \in S_0, \chi \in \hat{T}\}$  est un système générateur de l'algèbre  $H$ .

Par un argument classique, étant donnés  $\chi, \chi' \in \hat{T}$ , l'espace  $\text{Hom}_G(C_\chi, C_{\chi'})$  est non nul si et seulement si  $\chi$  et  $\chi'$  appartiennent à la même orbite sous  $W_0$ . On en déduit que les  $\varepsilon_\gamma, \gamma \in \Gamma$ , forment une famille d'idempotents centraux orthogonaux de  $H$  qui décomposent l'unité  $\mathbf{1}_U \in H$ . On pose  $H_\gamma = H \varepsilon_\gamma$ , et on note  $C_\gamma$  la somme directe des  $C_\chi$  pour  $\chi \in \gamma$ , qui est un  $H_\gamma$ -module. L'algèbre de Hecke  $H$  se décompose en la somme directe de  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbres :

$$H = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma.$$

**Proposition 1.22.** — *Le  $H$ -module  $C$  est plat si et seulement si le  $H_\gamma$ -module  $C_\gamma$  est plat pour toute orbite  $\gamma \in \Gamma$ .*

## 1.5. Représentations ayant des vecteurs invariants par le sous-groupe de Borel

On note  $1$  le caractère trivial de  $T$ . Son orbite sous  $W_0$  est réduite à un singleton. Si  $\chi = 1$ , on note  $C'$  et  $H'$  plutôt que  $C_1$  et  $H_1$  pour éviter d'éventuelles confusions avec certaines notations des sections 5, 6 et 7. L'algèbre  $H'$  est isomorphe à l'algèbre de Hecke de  $G$  relative au sous-groupe de Borel  $B$ , c'est-à-dire à l'espace des fonctions de  $G$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$  invariantes par translations à droite et à gauche par  $B$ , muni du produit de convolution d'unité égale à  $\mathbf{1}_B$ . C'est une algèbre de Frobenius : on a donc un résultat analogue au lemme 1.12 pour les  $H'$ -modules.

On note  $\mathcal{M}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}$  formée des  $H$ -modules à droite de type fini  $\mathfrak{m}$  tels que  $\mathfrak{m} \cdot \varepsilon_1 = \mathfrak{m}$ . Elle s'identifie naturellement à la catégorie  $\mathcal{M}(H')$  des  $H'$ -modules à droite de type fini. D'après la formule (1.8), si  $V$  est une représentation de  $G$ , alors  $V^U$  est dans  $\mathcal{M}'$  si et seulement si  $V^U = V^B$ .

**Proposition 1.23.** — *Soit  $V$  dans  $\mathcal{B}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *on a  $V^U = V^B$  ;*
- (2) *il existe  $b \geq 1$  tel que  $V$  soit isomorphe à l'image d'un endomorphisme de  $C'^b$ .*

*Démonstration.* — Si  $V$  satisfait à la condition (2), elle est isomorphe à une sous-représentation de  $C^b$  pour un entier  $b \geq 1$ . La propriété  $V^U = V^B$  suit alors de ce que  $C^U = C^B$ .

Si  $V$  satisfait à la condition (1), alors le module  $\mathfrak{m} = V^U$  est dans  $\mathcal{M}'$ . D'après le fait 1.17, si  $\iota$  est un homomorphisme injectif de  $H$ -modules de  $\mathfrak{m}$  dans  $H^d$  pour un entier  $d \geq 1$  convenable, l'image de l'application naturelle de  $\mathfrak{m} \otimes_H C$  dans  $C^d$  est isomorphe à  $V$ . Puisqu'on a  $\mathfrak{m} \cdot \varepsilon_1 = \mathfrak{m}$ , la représentation  $\mathfrak{m} \otimes_H C$  s'identifie à  $\mathfrak{m} \otimes_{H'} C'$ , et son image dans  $C^d$  est incluse dans  $C'^d$ , ce qui prouve que  $V$  satisfait à la condition (2).  $\square$

On note  $\mathcal{E}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  formée des représentations engendrées par leurs vecteurs  $B$ -invariants et  $\mathcal{B}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  formée des représentations  $V$  telles que  $V^U = V^B$ .

**Proposition 1.24.** — *On suppose que  $C'$  est un  $H'$ -module plat. Alors :*

- (1) les catégories  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{E}'$  coïncident ;
- (2) le foncteur  $\mathcal{F}$  induit une équivalence entre  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{M}'$ .

*Démonstration.* — D'après le théorème 1.15 et la proposition 1.23, le foncteur  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{M}'$ , et la seconde assertion découle de la première.

Soit  $V$  une représentation engendrée par l'espace  $\mathfrak{m}$  de ses vecteurs  $B$ -invariants. Soit  $\iota$  un homomorphisme injectif de  $H$ -modules de  $\mathfrak{m}$  dans  $H^d$  pour  $d \geq 1$  (voir le fait 1.16). Rappelons (fait 1.17) que  $V$  est isomorphe à l'image de l'application naturelle de  $\mathfrak{m} \otimes_H C$  dans  $C^d$ . Puisque  $\mathfrak{m}$  est dans  $\mathcal{M}'$ , celle-ci s'identifie à l'image de l'application de  $\mathfrak{m} \otimes_{H'} C'$  dans  $C'^d$ . Puisque  $C'$  est plat sur  $H'$ , cette dernière application est injective, c'est-à-dire que la représentation  $V$  est isomorphe à  $\mathfrak{m} \otimes_{H'} C'$ , ainsi qu'à une sous-représentation de  $C'^d$ . Elle est donc dans  $\mathcal{B}'$ .  $\square$

## 2. Le cas de $GL_2(k)$

Dans toute cette section, on suppose que  $n = 2$ , et l'on reprend les notations des paragraphes 1.4 et 1.5. Pour tout  $\chi \in \hat{T}$ , les facteurs irréductibles de  $C_\chi$  sont tous de multiplicité 1. Ils sont décrits par Diamond dans [15, Proposition 1.1] (voir aussi Jeyakumar [24]). On note  $s$  l'élément non trivial de  $W_0$  et  $q$  le cardinal de  $k$ . Une orbite  $\{\chi, \chi^s\} \in \Gamma$  est dite *régulière* si  $\chi \neq \chi^s$ .

Étant donnée une orbite  $\gamma$ , la structure de la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $H_\gamma$  est déterminée par exemple dans [14, §4]. Si  $\gamma$  est régulière,  $H_\gamma$  est engendrée par  $S_\gamma := \tau_s \varepsilon_\gamma$  et  $X := \varepsilon_\chi$ , avec les relations  $(S_\gamma)^2 = 0$  et  $S_\gamma X + X S_\gamma = S_\gamma$ . Sinon, la torsion par  $\chi$  permet de se ramener au cas où  $\gamma = \{1\}$ , et  $H'$  est engendrée par  $S := \tau_s \varepsilon_1$  avec la relation  $S^2 = -S$ .

**Proposition 2.1.** — *Le  $H'$ -module à gauche  $C'$  est plat.*

*Démonstration.* — En tant que  $H'$ -module à gauche,  $H'$  est la somme directe des modules projectifs indécomposables  $H'S = H'\tau_s$  et  $H'(S + \varepsilon_1)$ . Une base de  $C'$  comme  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel est  $\{e_a, a \in k \cup \{\infty\}\}$ , où  $e_\infty$  est la fonction caractéristique de  $B$  et  $e_a$ , pour  $a \in k$ , celle de :

$$Bs \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de  $e_a$  par  $\tau_s$  est la somme des  $e_b$  pour les  $b \in k \cup \{\infty\}$  tels que  $b \neq a$  (voir par exemple [29, 2.2.1]). On en déduit que l'application de  $H' \oplus (H'S)^{q-1}$  dans  $C'$  définie par :

$$(h, (h_a)_{a \in k^\times}) \mapsto h e_\infty + \sum_{a \in k^\times} h_a e_a$$

est un isomorphisme de  $H'$ -modules à gauche. On a prouvé que  $C'$  est un  $H'$ -module projectif, donc plat.  $\square$

**Proposition 2.2.** — *Le  $H$ -module à gauche  $C$  est plat si et seulement si  $q = p$ .*

*Démonstration.* — D’après la proposition 1.22, l’étude de la platitude du  $H$ -module à gauche  $C$  se ramène à celle des  $H_\gamma$ -modules à gauche  $C_\gamma$ . Si l’orbite  $\gamma = \{\chi, \chi^s\}$  n’est pas régulière, on se ramène en tordant par  $\chi$  au cas où  $\gamma = \{1\}$ , et la proposition 2.1 implique que  $C_\gamma$  est plat. On suppose maintenant que  $\gamma$  est régulière. En tant que  $H_\gamma$ -module à droite,  $H_\gamma$  est la somme directe des modules  $\varepsilon_\chi H_\gamma$  et  $\varepsilon_{\chi^s} H_\gamma$  et on a la suite exacte de  $H_\gamma$ -modules à droite :

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow \tau_s \varepsilon_{\chi^s} H_\gamma \rightarrow \varepsilon_\chi H_\gamma \rightarrow \tau_s \varepsilon_\chi H_\gamma \rightarrow 0.$$

D’après [14, Théorème 7.1], les représentations  $\tau_s C_\chi$  et  $\tau_s C_{\chi^s}$  sont irréductibles. Le calcul de leurs dimensions se trouve par exemple dans [32], dont le lemme 4.9 assure de plus que la somme de ces dimensions est égale à celle de  $C_\chi$  si et seulement si  $q = p$ . Par conséquent, la suite :

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow \tau_s C_{\chi^s} \rightarrow C_\chi \rightarrow \tau_s C_\chi \rightarrow 0$$

de représentations de  $G$  est exacte si et seulement si  $q = p$ . Si  $q$  est différent de  $p$ , cela signifie que l’exactitude de (2.1) n’est pas préservée par le produit tensoriel par le  $H_\gamma$ -module à gauche  $C_\gamma$ , qui n’est donc pas plat.

Supposons maintenant que  $q$  soit égal à  $p$ . Pour montrer que  $C_\gamma$  est plat, il suffit de montrer que, pour tout idéal à droite  $A \subseteq H_\gamma$ , l’homomorphisme naturel de  $A \otimes_{H_\gamma} C_\gamma$  dans  $C_\gamma$  est injectif (voir [5], chapitre 1, §2, n°3, proposition 1). D’après (2.1), il suffit de le montrer pour les idéaux  $\varepsilon_\chi H_\gamma$  et  $\tau_s \varepsilon_\chi H_\gamma$  et leurs analogues obtenus en substituant  $\chi^s$  à  $\chi$ . Puisque  $\varepsilon_\chi$  et  $\varepsilon_{\chi^s}$  sont des idempotents orthogonaux, la seule vérification non triviale concerne  $\tau_s \varepsilon_\chi H_\gamma$  et elle est assurée par l’exactitude de (2.2). Ceci met fin à la preuve de la proposition 2.2.  $\square$

Dans le cas où  $q \neq p$ , on construit une représentation qui est dans  $\mathcal{E}$  sans être dans  $\mathcal{B}$  (voir la proposition 1.18).

**Proposition 2.3.** — *Soit  $\chi$  un caractère de  $T$  d’orbite régulière, et soit  $K$  le noyau dans  $\mathcal{R}$  de  $\tau_s : C_{\chi^s} \rightarrow C_\chi$ . On suppose que  $q \neq p$ . Alors  $K^\vee$  est dans  $\mathcal{E}$  sans être dans  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* — On a une suite exacte dans  $\mathcal{R}$  :

$$(2.3) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow C_{\chi^s} \rightarrow \tau_s C_{\chi^s} \rightarrow 0$$

et puisque  $q \neq p$ , le noyau  $K$  contient strictement  $\tau_s C_{\chi^s}$  d’après la preuve de la proposition 2.2. En passant aux  $U$ -invariants, on a les inclusions :

$$(\tau_s C_\chi)^U \subseteq K^U \subseteq C_{\chi^s}^U.$$

Puisque  $\tau_s C_\chi$  est irréductible, le terme de gauche est de dimension 1 (voir la proposition 1.20), et l’on vérifie que celui de droite est de dimension 2. Si l’on avait  $K^U = C_{\chi^s}^U$ , la sous-représentation de  $K$  engendrée par  $K^U$  serait égale à  $C_{\chi^s}$ . On aurait  $K = C_{\chi^s}$ , ce qui contredirait le fait que la restriction de  $\tau_s$  à  $C_{\chi^s}$  n’est pas nulle. Aussi  $K$  et  $\tau_s C_\chi$  ont-elles le même espace de vecteurs  $U$ -invariants sans être égales, c’est-à-dire que  $K$  est une sous-représentation de  $C$  mais n’est pas engendrée par ses vecteurs  $U$ -invariants. Sa contragrédiente est donc dans  $\mathcal{E}$  et pas dans  $\mathcal{B}$ .  $\square$

### 3. Les foncteurs paraboliques

Dans toute cette section,  $G$  est le groupe  $GL_n(k)$  et  $M$  est un sous-groupe de Levi de  $G$ , que l’on supposera standard à partir du paragraphe 3.2. Tous les résultats de la section 1, énoncés pour  $G$ , s’étendent naturellement à  $M$ . On note  $\mathcal{R}(M)$  la catégorie des représentations (de dimension finie) de  $M$ .

### 3.1. Définition des foncteurs paraboliques

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  muni d'une décomposition de Levi  $P = MN$ . On note  $\mathbf{I}_P$  le foncteur d'induction parabolique de  $\mathcal{R}(M)$  dans  $\mathcal{R}(G)$  défini pour toute représentation  $V$  de  $M$  par :

$$\mathbf{I}_P(V) = \{f : G \rightarrow V \mid f(mng) = m \cdot f(g), m \in M, n \in N, g \in G\}$$

que l'on munit de l'action de  $G$  par translations à droite, et  $\mathbf{R}_P$  le foncteur de restriction parabolique de  $\mathcal{R}(G)$  dans  $\mathcal{R}(M)$  défini pour toute représentation  $V$  de  $G$  par :

$$\mathbf{R}_P(V) = V^N = \{v \in V \mid n \cdot v = v, n \in N\}$$

que l'on munit de l'action de  $M$  par restriction. On désigne par  $\mathbf{J}_P$  le foncteur de Jacquet de  $\mathcal{R}(G)$  dans  $\mathcal{R}(M)$  défini pour toute représentation  $V$  de  $G$  par :

$$\mathbf{J}_P(V) = V_N = V/V(N)$$

(où  $V(N)$  désigne le sous-espace de  $V$  engendré par les vecteurs de la forme  $n \cdot v - v$ , pour  $v \in V$  et  $n \in N$ ), que l'on munit de l'action naturelle de  $M$ . Pour  $g \in G$  et  $v \in V$ , on note  $[g, v]$  l'élément de  $\mathbf{I}_P(V)$  de support  $Pg^{-1}$  et prenant en  $g^{-1}$  la valeur  $v$ . Remarquons qu'on a  $[g, v] = g \cdot [1, v]$ . Les deux résultats suivants sont classiques.

**Proposition 3.1.** — *Le foncteur  $\mathbf{I}_P$  est adjoint à gauche de  $\mathbf{R}_P$ , et le foncteur  $\mathbf{J}_P$  est adjoint à gauche de  $\mathbf{I}_P$ .*

On rappelle que  $V^\vee$  désigne la représentation contragrédiente de  $V$ .

**Proposition 3.2.** — *Pour toute représentation  $V$  de  $M$ , les représentations  $\mathbf{I}_P(V^\vee)$  et  $\mathbf{I}_P(V)^\vee$  sont isomorphes.*

On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 3.3.** — *Pour toute représentation  $V$  de  $G$ , les représentations  $\mathbf{R}_P(V)^\vee$  et  $\mathbf{J}_P(V^\vee)$  de  $M$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* — En appliquant la proposition 3.1, on voit que le foncteur :

$$(3.1) \quad V \mapsto (\mathbf{R}_P(V^\vee))^\vee$$

est adjoint à gauche de  $\mathbf{I}_P$ . □

**Remarque 3.4.** — Le foncteur  $\mathbf{I}_P$  est exact de  $\mathcal{R}(M)$  dans  $\mathcal{R}(G)$ . Il suffit en effet de vérifier que, si  $f : V_1 \rightarrow V_2$  est un homomorphisme surjectif de représentations de  $M$ , alors, pour tous les  $g \in G$  et  $v_2 \in V_2$ , la fonction  $[g, v_2] \in \mathbf{I}_P(V_2)$  se relève en  $[g, v_1] \in \mathbf{I}_P(V_1)$ , où  $v_1 \in V_1$  est un relèvement de  $v_2$ .

### 3.2. Système de représentants *minimal*

On suppose dorénavant que  $M$  est un sous-groupe de Levi standard de  $G$ , et que  $P = MN$  est le sous-groupe parabolique standard (constitué de matrices triangulaires supérieures par blocs) lui correspondant.

On note  $U_M = U \cap M$  le sous-groupe unipotent maximal standard de  $M$ , et  $C_M$  la représentation de  $M$  induite à partir du caractère trivial de  $U_M$ . On note :

$$(3.2) \quad i_M : C_M \rightarrow C$$

l'unique homomorphisme de représentations de  $M$  envoyant  $\mathbf{1}_{U_M}$  (la fonction caractéristique de  $U_M$  dans  $M$ ) sur  $\mathbf{1}_U$ . Son image est contenue dans l'espace des vecteurs  $N$ -invariants de  $C$ . On

note  $H_M$  l'algèbre des  $M$ -endomorphismes de  $C_M$ , qu'on identifie au sous-espace de ses vecteurs  $U_M$ -invariants. On pose  $W_M = W \cap M$ .

D'après [13, Proposition 2.3.3], pour tout élément  $w \in W$ , la classe  $wW_M$  contient un unique élément de  $W_0$  de longueur minimale, que l'on note  $d(w)$ . On pose :

$$(3.3) \quad \mathcal{D}_M = \{d(w) \mid w \in W\}.$$

C'est un système de représentants de  $W/W_M$ . On note  $\Phi_M \subseteq \Phi$  l'ensemble des racines associées à une réflexion de  $W_M$ . Alors un élément  $d \in W_0$  appartient à  $\mathcal{D}_M$  si et seulement si  $d \cdot \alpha \in \Phi^+$  pour tout  $\alpha \in \Phi_M \cap \Phi^+$ , ou encore, si et seulement si  $d \cdot \alpha \in \Phi^-$  pour toute racine  $\alpha \in \Phi_M \cap \Phi^-$ . L'ensemble  $\mathcal{D}_M$  possède la propriété suivante, démontrée dans [31, Proposition 2.2].

**Lemme 3.5.** — Soient  $s \in S_0$  et  $d \in \mathcal{D}_M$ .

- Si  $\ell(sd) = \ell(d) - 1$ , alors  $sd \in \mathcal{D}_M$ .
- Si  $\ell(sd) = \ell(d) + 1$ , alors ou bien  $sd \in \mathcal{D}_M$  ou bien  $sd \in dW_M$ .

La propriété suivante vient de [13, Proposition 2.3.3].

**Lemme 3.6.** — Pour tous  $d \in \mathcal{D}_M$  et  $w \in W_M$ , on a  $UdUwU = UdwU$ .

Autrement dit, on a  $\tau_d \tau_w = \tau_{dw}$  pour tout  $d \in \mathcal{D}_M$  et tout  $w \in W_M$ . On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 3.7.** — L'algèbre  $H$  est un  $H_M$ -module à droite (respectivement à gauche) libre de base  $\{\tau_d\}_{d \in \mathcal{D}_M}$  (respectivement  $\{\tau_{d^{-1}}\}_{d \in \mathcal{D}_M}$ ).

On note  $U^-$  le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires inférieures de  $G$ .

**Lemme 3.8.** — Pour tout  $d \in \mathcal{D}_M$ , on a :

- (1)  $dU_M d^{-1} \subseteq U$  et  $d(U^- \cap M)d^{-1} \subseteq U^-$  ;
- (2)  $d^{-1}Ud \cap P \subseteq U$  ;
- (3)  $d^{-1}UdN \cap M = U_M$ .

*Démonstration.* — La propriété (1) est une conséquence de la caractérisation de  $\mathcal{D}_M$  en termes de racines. Ensuite, d'après [13, 2.5.12], tout élément  $u \in U$  s'écrit de façon unique sous la forme  $u = xy$ , avec  $x \in U \cap dUd^{-1}$  et  $y \in U \cap dU^-d^{-1}$ . Si  $d^{-1}ud$  appartient à  $P$ , alors  $d^{-1}yd \in U^- \cap P$ , donc  $y \in U^-$ . On en déduit que  $y = 1$  et que  $d^{-1}ud = d^{-1}xd \in U$ , ce qui prouve (2).

Soient  $n \in N$  et  $u \in U$  tels qu'on ait  $d^{-1}udn \in M$ . D'après (2), l'élément  $d^{-1}ud$  appartient à l'intersection  $d^{-1}Ud \cap P$  qui est incluse dans  $U$ . On en déduit que  $d^{-1}udn \in U \cap M = U_M$ , ce qui prouve que  $d^{-1}UdN \cap M \subseteq U_M$ . L'inclusion réciproque est une conséquence de (1).  $\square$

Notons que  $\mathcal{D}_M$  est aussi un système de représentants des doubles classes de  $U \backslash G / P$ .

**Lemme 3.9.** — L'application  $j_M : H_M \rightarrow H$  définie par :

$$j_M(\mathbf{1}_{U_M m U_M}) = \mathbf{1}_{U_m U}, \quad m \in M,$$

est un homomorphisme injectif de  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbres, égal à la restriction de  $i_M$  à  $H_M$ .

*Démonstration.* — Pour  $w \in W_M$ , la fonction caractéristique de la double classe :

$$U_M w U_M = \coprod_{x \in (U_M \cap w^{-1} U_M w) \setminus U_M} U_M w x$$

est envoyée par  $i_M$  sur la somme des  $\mathbf{1}_{U_w x}$ . Comme  $UwU = UwNU_M$ , comme  $N$  est normalisé par  $w$  et comme  $wx \in Uw$  équivaut à  $wxw^{-1} \in U_M$ , la double classe  $UwU$  est la réunion disjointe des

$Uwx$ . Ainsi la restriction de  $\mathbf{i}_M$  à  $H_M$  est égale à  $\mathbf{j}_M$ . Enfin, comme on a  $UwUw'U = UwU_Mw'U$  pour tout  $w, w' \in W_M$ , on vérifie que  $\mathbf{j}_M$  est un homomorphisme de  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbres.  $\square$

On identifiera dorénavant  $H_M$  à son image dans  $H$ .

### 3.3. Calcul de $\mathbf{R}_P(C)$

On considère l'homomorphisme de représentations de  $M$  :

$$(3.4) \quad \xi_P : H \otimes_{H_M} C_M \rightarrow \mathbf{R}_P(C), \quad h \otimes c \mapsto h * \mathbf{i}_M(c),$$

où  $*$  désigne l'action à gauche de  $H$  sur  $C$ . L'objet de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante.

**Proposition 3.10.** — *L'application  $\xi_P$  est un isomorphisme à la fois de représentations de  $M$  et de  $H$ -modules à gauche.*

*Démonstration.* — Tout élément de  $\mathbf{R}_P(C)$  est une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $\mathbf{1}_{UgN}$ , où  $g \in G$  peut être choisi de la forme  $g = dm$ , avec  $d \in \mathcal{D}_M$  et  $m \in M$ . On fixe  $d \in \mathcal{D}_M$ , et on considère l'application de  $M$  dans  $U \backslash G / N$  définie par :

$$m \mapsto UdmN = UdNm.$$

Elle a pour image l'ensemble des doubles classes modulo  $(U, N)$  qui sont contenues dans  $UdP$ . D'après le lemme 3.8(1), pour tout  $u \in U_M$ , les éléments  $m$  et  $um$  ont la même image. Inversement, si  $m, m' \in M$  ont la même image par cette application, alors, comme  $M$  normalise  $N$ , on trouve  $Udmm'^{-1}N = UdN$ , et donc  $mm'^{-1}$  appartient à  $d^{-1}UdN \cap M$ . D'après le lemme 3.8(3), on en déduit que  $U_Mm = U_Mm'$ . En d'autres termes, l'application :

$$\mathbf{1}_{U_Mm} \mapsto \mathbf{1}_{UdmN}$$

est injective et  $M$ -équivariante de  $C_M$  dans  $C$ , et son image est le sous-espace des fonctions  $N$ -invariantes de  $C$  supportées dans  $UdP$ . On voit maintenant que la réciproque de  $\xi_P$  est donnée par :

$$(3.5) \quad \mathbf{1}_{UdmN} \mapsto \tau_d \otimes \mathbf{1}_{U_Mm}.$$

Enfin, on vérifie immédiatement que  $\xi_P$  est un homomorphisme de représentations de  $M$  et de  $H$ -modules à gauche.  $\square$

**Remarque 3.11.** — On a vu au passage dans cette preuve (voir (3.5)) que la fonction caractéristique de  $UdmN$  est égale à  $\tau_d(\mathbf{1}_{U_M})$ .

On en déduit le résultat suivant. On note  $\mathcal{B}(M)$  la sous-catégorie de  $\mathcal{R}(M)$  déterminée par la définition 1.8.

**Proposition 3.12.** — *Soit  $V$  une représentation dans  $\mathcal{B}(M)$ . Alors  $\mathbf{I}_P(V)$  est dans  $\mathcal{B}(G)$ .*

*Démonstration.* — C'est une conséquence de l'exactitude de  $\mathbf{I}_P$ . Si  $V$  est l'image d'un endomorphisme  $u \in \text{End}_G((C_M)^b)$  pour un entier  $b \geq 1$  convenable, alors  $\mathbf{I}_P(V)$  est l'image de  $\mathbf{I}_P(u)$ , qui est dans  $\text{End}_G(C^b)$ .  $\square$

Le résultat suivant est un analogue de la proposition 3.12 pour les foncteurs  $\mathbf{R}_P$  et  $\mathbf{J}_P$ .

**Proposition 3.13.** — *Soit  $V$  une représentation dans  $\mathcal{B}(G)$ . Alors les représentations  $\mathbf{R}_P(V)^\dagger$  et  $\mathbf{J}_P(V)^\ddagger$  sont dans  $\mathcal{B}(M)$  (voir le paragraphe 1.1 pour les définitions de  $\dagger$  et  $\ddagger$ ).*

*Démonstration.* — D'après le corollaire 3.3, il suffit de le prouver pour  $\mathbf{R}_P$ . Soit un entier  $b \geq 1$  tel que  $V$  se plonge dans  $C^b$ . Puisque  $\mathbf{R}_P$  est exact à gauche,  $\mathbf{R}_P(V)$  se plonge dans  $(\mathbf{R}_P(C))^b$ . D'après la proposition 3.10, et comme  $H$  est libre comme  $H_M$ -module à droite,  $(\mathbf{R}_P(C))^b$  est isomorphe à une somme directe de copies de  $C_M$ . Ainsi  $\mathbf{R}_P(V)^\dagger$  est dans  $\mathcal{B}(M)$ .  $\square$

### 3.4. Diagrammes commutatifs

Puisque  $U$  se décompose sous la forme  $U_M \cdot N$ , on a :

$$(3.6) \quad V^U = \mathbf{R}_P(V)^{U_M}$$

pour toute représentation  $V$  de  $G$ , qui est une égalité de  $H_M$ -modules à droite.

Par adjonction, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 3.14.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $H_M$ -module à droite de type fini. Il existe un unique homomorphisme de représentations de  $G$  :*

$$(3.7) \quad \mathfrak{m} \otimes_{H_M} C \rightarrow \mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$$

envoyant  $x \otimes \mathbf{1}_{U_{g^{-1}}}$  sur  $[g, x \otimes \mathbf{1}_{U_M}]$  pour tous  $x \in \mathfrak{m}$  et  $g \in G$ , et c'est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Étant donné un élément  $x$  de  $\mathfrak{m}$ , on note  $f_x$  l'unique homomorphisme de  $C$  dans  $\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$  envoyant  $\mathbf{1}_U$  sur  $[1, x \otimes \mathbf{1}_{U_M}]$ , qui est bien défini puisque cette dernière est invariante par  $U$  dans  $\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$ . On vérifie que l'application  $x \mapsto f_x$  est  $H_M$ -linéaire. Par adjonction, il lui correspond l'homomorphisme (3.7), que l'on note  $\Psi_{\mathfrak{m}}$ . À partir de (3.6), on a :

$$(3.8) \quad \mathrm{Hom}_{H_M}(\mathfrak{m}, V^U) = \mathrm{Hom}_{H_M}(\mathfrak{m}, \mathbf{R}_P(V)^{U_M})$$

pour toute représentation  $V$  de  $G$ . Par une succession d'adjonctions, le membre de gauche de (3.8) est  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} H, V^U) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C, V)$$

et le membre de droite à :

$$\mathrm{Hom}_M(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M, \mathbf{R}_P(V)) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M), V)$$

pour toute représentation  $V$  de  $G$ , ce qui prouve que les deux membres de (3.7) sont isomorphes en tant que représentations de  $G$ . Il suffit donc de prouver que l'homomorphisme  $\Psi_{\mathfrak{m}}$  est surjectif. Or l'induite parabolique  $\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$  est engendrée comme représentation de  $G$  par les fonctions  $[1, x \otimes \mathbf{1}_{U_M}]$ , avec  $x \in \mathfrak{m}$ , qui sont dans l'image de  $\Psi_{\mathfrak{m}}$  par construction.  $\square$

**Remarque 3.15.** — En particulier, lorsque  $\mathfrak{m}$  est libre de rang 1, on obtient un isomorphisme de représentations entre  $C$  et  $\mathbf{I}_P(C_M)$ , qui n'est autre que l'isomorphisme naturel provenant de la transitivité de l'induction.

**Proposition 3.16.** — *Pour toute représentation  $V$  de  $M$ , on a un isomorphisme de  $H$ -modules à droite entre  $\mathbf{I}_P(V)^U$  et  $V^{U_M} \otimes_{H_M} H$ .*

*Démonstration.* — On note  $\mathcal{D}'_M$  l'ensemble des  $d^{-1}$  pour  $d \in \mathcal{D}_M$  (voir (3.3)). Étant donné  $d \in \mathcal{D}'_M$  et  $x \in V^{U_M}$ , on désigne par  $\psi_{d,x}$  la fonction  $U$ -invariante de  $\mathbf{I}_P(V)$  de support  $PdU$  et de valeur  $x$  en  $d$ . Une base de  $\mathbf{I}_P(V)^U$  est donnée par l'ensemble des  $\psi_{d,x}$  pour  $d \in \mathcal{D}'_M$  et  $x$  parcourant une base de  $V^{U_M}$  (voir par exemple [37, I.5.6], en utilisant le lemme 3.8 (2)). Soient  $x \in V^{U_M}$ ,  $w \in W_M$  et  $d \in \mathcal{D}'_M$ . Les égalités suivantes sont vérifiées :

$$(3.9) \quad \psi_{1,x} \tau_d = \psi_{d,x},$$

$$(3.10) \quad \psi_{1,x} \tau_w = \psi_{1,x} \tau_w.$$



Pour la première égalité, on remarque d'abord que la fonction  $\psi_{1,x}\tau_d$  est  $U$ -invariante de support  $PdU$ . Pour prouver que sa valeur en  $d$  est  $x$ , il suffit de remarquer que pour  $u \in U$ , on a  $Pdu = Pd$  si et seulement si  $Udu = Ud$ , ce qui est donné par le lemme 3.8(2). La seconde s'obtient aisément grâce à la décomposition de la double classe  $UwU$  décrite dans la preuve du lemme 3.9.

L'égalité (3.10) assure que l'on a un morphisme de  $H_M$ -modules à droite  $V^{U_M} \rightarrow \mathbf{I}_P(V)^U$  bien défini par  $x \mapsto \psi_{1,x}$ . Il induit un morphisme  $H$ -équivalent :

$$(3.11) \quad V^{U_M} \otimes_{H_M} H \longrightarrow \mathbf{I}_P(V)^U.$$

L'égalité (3.9) assure que (3.11) est surjective. D'après la proposition 3.7, les espaces en question ont même dimension. Donc (3.11) est bijective.  $\square$

On déduit de la proposition 3.16 le résultat suivant.

**Proposition 3.17.** — *Pour tout  $H$ -module à droite de type fini  $\mathfrak{m}$ , on a un isomorphisme de représentations de  $M$  entre  $\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M$  et  $\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C)$ .*

*Démonstration.* — Par une succession d'adjonctions, on a :

$$\mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m}, \mathbf{I}_P(V)^U) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{m} \otimes_H C, \mathbf{I}_P(V)) \simeq \mathrm{Hom}_M(\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C), V)$$

pour toute représentation  $V$  de  $M$ , et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m}, \mathrm{Hom}_{H_M}(H, V^{U_M})) &\simeq \mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m}, \mathrm{Hom}_M(H \otimes_{H_M} C_M, V)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_M(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M, V). \end{aligned}$$

On en déduit que les représentations  $\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C)$  et  $\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M$  sont isomorphes.  $\square$

### 3.5. Un cas particulier

Dans ce paragraphe, on suppose que  $M = T$  et  $N = U$ . Le  $H_T$ -module à gauche  $C_T$  est libre de rang 1, et l'on identifie les catégories  $\mathcal{M}(H_T)$  et  $\mathcal{R}(T)$ .

**Proposition 3.18.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $H$ -module à droite de dimension 1. Alors  $\mathfrak{m} \otimes_H C$  est irréductible si et seulement si elle est dans  $\mathcal{B}(G)$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.17, le module  $\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C)$  est de dimension 1. C'est encore le cas de  $\mathbf{R}_P((\mathfrak{m} \otimes_H C)^\vee)$ , qui engendre donc dans  $(\mathfrak{m} \otimes_H C)^\vee$  une sous-représentation irréductible puisque, pour toute représentation irréductible  $V$ , le module  $V^U$  est de dimension 1. On en déduit que  $(\mathfrak{m} \otimes_H C)^\vee$  est irréductible si et seulement si elle est dans  $\mathcal{B}(G)$ . Par passage à la contragrédiente, il en est de même pour  $\mathfrak{m} \otimes_H C$ .  $\square$

Illustrons ceci au travers des exemples classiques du caractère *trivial* et du caractère *signe* de  $H$ . On note  $w_0$  l'élément de  $W_0$  de longueur maximale, égale à  $m = n(n-1)/2$ , le nombre d'éléments de  $\Phi^+$ . Pour chaque élément  $s \in S_0$ , il existe une écriture réduite de  $w_0$  commençant par  $s$ . On choisit une écriture réduite  $w_0 = s_{i_m} \dots s_{i_1}$ . Avec les notations du paragraphe 1.4, pour tout  $s \in S_0$ , on pose :

$$\tau_s^* = \tau_s + \sum_{\chi^s = \chi} \varepsilon_\chi.$$

C'est un élément de  $H$  vérifiant  $\tau_s \tau_s^* = \tau_s^* \tau_s = 0$ . La fonction caractéristique de  $G$  s'écrit alors :

$$\mathbf{1}_G = (-1)^m \tau_{s_{i_1}}^* \dots \tau_{s_{i_m}}^* \varepsilon_1.$$

C'est un idempotent de  $H$ , donc le  $H$ -module à droite  $\mathbf{1}_G \cdot H$  est un facteur direct de  $H$ . C'est de plus un espace vectoriel de dimension 1 qui porte le caractère trivial de  $H$ , défini par  $\varepsilon_1 \mapsto 1$  et  $\tau_s \mapsto 0$  pour tout  $s \in S_0$ . L'application naturelle  $\mathbf{1}_G \otimes_H C \rightarrow C$  est injective et  $\mathbf{1}_G \otimes_H C$  est isomorphe à la représentation triviale de  $G$ .

On considère maintenant le  $H$ -module à droite  $\tau_{w_0}\varepsilon_1 \cdot H = \tau_{w_0} \cdot H'$ , qu'on note  $\mathfrak{st}$ . D'après la remarque 1.21 (2), on a  $\tau_{w_0}\tau_s\varepsilon_1 = -\tau_{w_0}\varepsilon_1$  pour  $s \in S_0$ . On en déduit que  $\mathfrak{st}$  est de dimension 1 et porte le caractère signe de  $H$ , défini par  $\varepsilon_1 \mapsto 1$  et  $\tau_s \mapsto -1$  pour tout  $s \in S_0$ . De plus,  $\tau_{w_0}\varepsilon_1$  est, au signe près, un idempotent de  $H$ , de sorte que l'application  $G$ -équivariante :

$$\mathfrak{st} \otimes_H C \rightarrow C$$

est injective et  $\mathfrak{st} \otimes_H C$  est dans  $\mathcal{B}(G)$ . La remarque faite au début de ce paragraphe s'applique bien au  $H$ -module  $\mathfrak{st}$  et la représentation  $\mathfrak{st} \otimes_H C$ , qui s'identifie à  $\mathfrak{st} \otimes_{H'} C'$ , est irréductible.

On va montrer qu'elle est isomorphe à la représentation de Steinberg  $St$  de  $G$  définie comme le quotient de l'induite  $\mathbf{I}_B(1)$  par la somme de ses sous-représentations  $\mathbf{I}_P(1)$ , où  $P$  décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques propres de  $G$  contenant  $B$ . Rappelons que  $\mathbf{I}_P(1)$  est engendrée par la fonction caractéristique de  $P$ . Or, pour  $s \in S_0$ , l'élément  $\tau_s^*\varepsilon_1$  est la fonction caractéristique de  $B \cup BsB$ , de sorte que  $St$  est isomorphe au quotient de  $C'$  par la somme des images  $\tau_s^*(C')$  pour  $s$  parcourant  $S_0$ . Puisque  $\tau_{w_0}\tau_s^* = 0$  pour tout  $s \in S_0$ , on a une surjection  $G$ -équivariante :

$$(3.12) \quad St \rightarrow \mathfrak{st} \otimes_{H'} C'.$$

Il reste à voir que cet homomorphisme est injectif.

**Lemme 3.19.** — *Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , l'idempotent central  $\varepsilon_1$  appartient à :*

$$(-1)^j \tau_{s_{i_j} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1 + \tau_{s_{i_j}}^* \varepsilon_1 H + \dots + \tau_{s_{i_1}}^* \varepsilon_1 H.$$

*Démonstration.* — Pour  $j = 1$ , on a en effet  $\varepsilon_1(\tau_{s_{i_1}}^* - \tau_{s_{i_1}}) = \varepsilon_1$  d'après (1.9). Supposons le lemme vrai au rang  $j$ , avec  $1 \leq j \leq m-1$ . On écrit :

$$(-1)^j \tau_{s_{i_j} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1 = (-1)^j (\tau_{s_{i_{j+1}}}^* - \tau_{s_{i_{j+1}}}) \tau_{s_{i_j} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1.$$

Le résultat s'ensuit par récurrence.  $\square$

Le lemme au rang  $j = m$  assure que pour  $f \in C'$ , l'égalité  $\tau_{w_0}f = 0$  implique que  $f$  appartient à  $\tau_{s_{i_m}}^* C' + \dots + \tau_{s_{i_1}}^* C'$ . Autrement dit, l'application (3.12) est injective.

Remarquons que Cabanes et Enguehard définissent la représentation de Steinberg comme la représentation irréductible de  $G$  correspondant au caractère signe de  $H$  ([12, Définition 6.13]) et proposent de retrouver la présente définition au travers de [12, Chap. 6, Exercices 3 et 4].

### 3.6. Condition nécessaire de platitude pour le $H$ -module $C$

On donne une condition reliant la platitude de  $C$  à celle de  $C_M$ .

**Proposition 3.20.** — *Si  $C$  est un  $H$ -module plat, alors  $C_M$  est un  $H_M$ -module plat.*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal à droite de  $H_M$ . Notons  $K$  le noyau de l'application naturelle :

$$(3.13) \quad \mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M \rightarrow C_M.$$

Le foncteur  $\mathbf{I}_P$  est un foncteur exact (à gauche) de  $\mathcal{R}(M)$  dans  $\mathcal{R}(G)$ , si bien que le noyau de :

$$(3.14) \quad \mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M) \rightarrow \mathbf{I}_P(C_M)$$

est isomorphe à  $\mathbf{I}_P(K)$ . Les isomorphismes fournis par la proposition 3.14 assurent alors que le noyau de l'application naturelle :

$$(3.15) \quad \mathfrak{m} \otimes_{H_M} C \rightarrow C$$

est lui aussi isomorphe à  $\mathbf{I}_P(K)$ . La proposition 3.7 dit que le  $H_M$ -module à gauche  $H$  est libre, de sorte que  $\mathfrak{m} \otimes_{H_M} H$  est isomorphe à l'idéal à droite de  $H$  engendré par  $\mathfrak{m}$ . Par conséquent, si  $C$  est un  $H$ -module plat, (3.15) est injective,  $\mathbf{I}_P(K)$  est la représentation nulle, et le noyau  $K$  de

(3.13) est trivial. Nous avons prouvé que si  $C$  est un  $H$ -module plat, alors l'application (3.13) est injective pour tout idéal à droite  $\mathfrak{m}$  de  $H_M$ , c'est-à-dire que  $C_M$  est un  $H_M$ -module plat.  $\square$

On note  $C^{(n)}$  et  $H^{(n)}$  les quantités  $C$  et  $H$  associées à  $G = GL_n(k)$  pour  $n \geq 1$ .

**Corollaire 3.21.** — *S'il existe un entier  $n_0 \geq 1$  tel que le  $H^{(n_0)}$ -module  $C^{(n_0)}$  ne soit pas plat, alors, pour tout  $n \geq n_0$ , le  $H^{(n)}$ -module  $C^{(n)}$  n'est pas plat.*

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer la proposition 3.20 avec  $M = GL_{n_0}(k) \times GL_{n-n_0}(k)$ , et de remarquer que  $C_M = C^{(n_0)} \oplus C^{(n-n_0)}$  n'est pas plat sur  $H_M = H^{(n_0)} \oplus H^{(n-n_0)}$  puisque  $C^{(n_0)}$  n'est pas plat sur  $H^{(n_0)}$ .  $\square$

On déduit de ce corollaire et de la proposition 2.2 le résultat suivant.

**Corollaire 3.22.** — *On suppose que  $q \neq p$ . Pour tout entier  $n \geq 2$ , le  $H^{(n)}$ -module  $C^{(n)}$  n'est pas plat.*

Rappelons que l'extension des scalaires de  $H_M$  à  $H$  préserve la platitude [5, I.2.7] et la projectivité [6, II.5.1]. À ceci s'ajoute le résultat suivant, conséquence de la proposition 3.7.

**Lemme 3.23.** — *Tout  $H_M$ -module à gauche  $\mathfrak{m}$  est un facteur direct de la restriction de  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  à  $H_M$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.7, l'espace vectoriel  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  s'identifie à la somme directe des  $\tau_d \mathfrak{m}$  pour  $d \in \mathcal{D}_M$ . On note  $\mathfrak{n}$  la somme directe des  $\tau_d \mathfrak{m}$  pour  $d \in \mathcal{D}_M$ ,  $d \neq 1$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ . Pour prouver le lemme, il suffit de s'assurer que ce sous-espace est stable sous l'action de  $H_M$ . On rappelle que l'algèbre  $H_M$  est engendrée par  $\{\tau_s, \tau_t \mid s \in S_0 \cap W_M, t \in T\}$ .

Puisqu'un élément  $t \in T$  est de longueur nulle dans  $W$ , les relations (1.2) assurent que, pour tout  $d \in \mathcal{D}_M$ , on a l'égalité :

$$\tau_t \tau_d = \tau_d \tau_{d^{-1}td},$$

et l'on remarque que  $d^{-1}td \in T$ . Ainsi, un sous-espace de la forme  $\tau_d \mathfrak{m}$  avec  $d \in \mathcal{D}_M$  est stable sous l'action de  $\tau_t$  pour  $t \in T$ . On en déduit que  $\mathfrak{n}$  est stable sous l'action de  $\tau_t$  pour tout  $t \in T$ .

Soit  $s \in S_0 \cap W_M$ . Vérifions que l'espace  $\mathfrak{n}$  est stable sous l'action de  $\tau_s$ . Soit  $d \in \mathcal{D}$  tel que  $d \neq 1$ . Si  $\ell(sd) = \ell(d) - 1$ , alors  $\tau_d = \tau_s \tau_{sd}$  et  $sd \in \mathcal{D}_M$  d'après le lemme 3.5. D'après la remarque 1.21, on a :

$$\tau_s^2 = -\tau_s \sum_{\chi^s = \chi} \varepsilon_\chi.$$

Ainsi l'élément :

$$a = - \sum_{\chi^s = \chi} \varepsilon_\chi$$

vérifie  $\tau_s \tau_d = \tau_s a \tau_{sd}$ . On en déduit que  $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_s a \tau_{sd} \mathfrak{m}$ , qui est inclus dans  $\tau_s \tau_{sd} \mathfrak{m} = \tau_d \mathfrak{m}$  d'après l'argument précédent. Si  $\ell(sd) = \ell(d) + 1$ , alors  $\tau_s \tau_d = \tau_{sd}$ . Si l'élément  $sd$  appartient à  $\mathcal{D}_M$ , alors  $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_{sd} \mathfrak{m}$  est inclus dans  $\mathfrak{n}$ . Sinon,  $sd \in dW_M$  d'après le lemme 3.5. Il existe donc  $w \in W_M$  tel que  $\tau_{sd} = \tau_d \tau_w$ , de sorte que  $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_d \tau_w \mathfrak{m}$  est inclus dans  $\tau_d \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ . Ainsi,  $\mathfrak{n}$  est bien un  $H_M$ -module.  $\square$

**Corollaire 3.24.** — *Un  $H_M$ -module à gauche de type fini  $\mathfrak{m}$  est projectif si et seulement si le  $H$ -module  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  est projectif.*

*Démonstration.* — On suppose que le  $H$ -module  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  est projectif. C'est un facteur direct d'un  $H$ -module libre. D'après le lemme 3.23, le  $H_M$ -module à gauche  $\mathfrak{m}$  est alors un facteur direct d'une somme de copies de  $H$ . Comme  $H$  est un  $H_M$ -module à gauche libre, on en déduit que  $\mathfrak{m}$  est un  $H_M$ -module projectif.  $\square$

Grâce au lemme 1.12, on en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 3.25.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $H_M$ -module à gauche de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathfrak{m}$  est plat.
- (2)  $\mathfrak{m}$  est projectif.
- (3)  $\mathfrak{m}$  est injectif.
- (4)  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  est plat.
- (5)  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  est projectif.
- (6)  $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$  est injectif.

Grâce à la proposition 3.10, on en déduit la proposition suivante.

**Proposition 3.26.** — *Le  $H$ -module  $C^N$  est plat si et seulement si le  $H_M$ -module  $C_M$  est plat. Dans ce cas ils sont tous deux projectifs et le  $H$ -module  $C^N$  est un facteur direct de  $C$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que l'homomorphisme  $i_M$  défini en (3.2) est un homomorphisme injectif de  $C_M$  dans  $C$ , et que, d'après la proposition 3.10, l'homomorphisme (3.4) est un isomorphisme de  $H$ -modules entre  $H \otimes_{H_M} C_M$  et  $C^N$ . Le résultat est alors une conséquence des lemmes 3.24 et 1.13.  $\square$

## 4. Le cas de $GL_3(k)$

Dans ce paragraphe, on suppose que  $n = 3$ . L'objectif de cette section est de démontrer les propositions 4.12 et 4.13 énoncées plus loin.

### 4.1. Représentations de $GL_n(\mathbf{F}_{p^r})$

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats de [23] et [19, 20].

Soit  $T(\overline{\mathbf{F}}_p)$  le sous-groupe des matrices diagonales de  $GL_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$ , soit  $B(\overline{\mathbf{F}}_p)$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de  $GL_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$ , soit  $U(\overline{\mathbf{F}}_p)$  son radical unipotent et soit  $U^-(\overline{\mathbf{F}}_p)$  le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé. On note  $X$  le groupe des caractères algébriques de  $T(\overline{\mathbf{F}}_p)$ , que l'on identifie à  $\mathbf{Z}^n$ , et  $X_+$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(a_1, \dots, a_n) \in X$  tels que  $a_1 \geq \dots \geq a_n$ . Pour  $\lambda \in X_+$ , on note  $\mathscr{W}(\lambda)$  l'espace de fonctions rationnelles :

$$\{f : GL_n(\overline{\mathbf{F}}_p) \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p \mid f(gtu) = \lambda(t)^{-1} f(g), g \in GL_n(\overline{\mathbf{F}}_p), t \in T(\overline{\mathbf{F}}_p), u \in U^-(\overline{\mathbf{F}}_p)\}$$

qu'on munit de l'action de  $GL_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$  par translations à gauche. C'est une représentation algébrique de  $GL_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$ . On note  $\mathscr{L}(\lambda)$  son socle. Pour tout entier  $r \geq 0$ , on pose :

$$X_r = \{(a_1, \dots, a_n) \in X_+ \mid 0 \leq a_i - a_{i+1} \leq p^r - 1, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Pour tout  $r \geq 1$ , on note  $\mathbf{F}_{p^r}$  l'unique sous-corps de  $\overline{\mathbf{F}}_p$  de cardinal  $p^r$  et, étant donné  $\lambda \in X_r$  et  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , on note  $\mathscr{L}_r(\lambda)$  la restriction de  $\mathscr{L}(\lambda)$  à  $GL_n(\mathbf{F}_{p^r})$  et  $\mathscr{L}_r(\lambda)^{(i)}$  la composée de  $\mathscr{L}_r(\lambda)$  avec l'automorphisme de  $GL_n(\mathbf{F}_{p^r})$  induit par  $x \mapsto x^{p^i}$ . On a les résultats suivants.

**Proposition 4.1.** — *On fixe un entier  $r \geq 1$ .*

- (1) *Pour tout  $\lambda \in X_r$ , la représentation  $\mathscr{L}_r(\lambda)$  de  $GL_n(\mathbf{F}_{p^r})$  est irréductible.*

(2) L'application  $\lambda \mapsto \mathcal{L}_r(\lambda)$  induit une bijection entre  $X_r/(p^r - 1)X_0$  et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_{p^r})$ .

(3) L'espace des vecteurs  $\mathbf{U}(\mathbf{F}_{p^r})$ -invariants de  $\mathcal{L}_r(\lambda)$  est de dimension 1, et la représentation de  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$  sur cet espace est égale à  $\lambda$ .

(4) Si  $\lambda = (a_1, \dots, a_n) \in X_r$ , alors  $\lambda^* = (-a_n, \dots, -a_1) \in X_r$  et  $\mathcal{L}_r(\lambda^*)$  est isomorphe à la représentation contragrédiente de  $\mathcal{L}_r(\lambda)$ .

(5) Soit  $\lambda \in X_r$ , qu'on écrit sous la forme :

$$(4.1) \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 p + \dots + \lambda_{r-1} p^{r-1}, \quad \lambda_i \in X_1, \quad i \in \{0, \dots, r-1\}.$$

Alors on a un isomorphisme de représentations de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_{p^r})$  :

$$(4.2) \quad \mathcal{L}_r(\lambda) \simeq \mathcal{L}_r(\lambda_0) \otimes \mathcal{L}_r(\lambda_1)^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_r(\lambda_{r-1})^{(r-1)}.$$

*Démonstration.* — Pour les deux premières assertions, voir [20, Appendix 1.3] et pour (3), voir [21, Lemma 2.5]. Pour les deux dernières, voir [23, II.3].  $\square$

En comparant les propositions 4.1 et 1.20, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 4.2.** — Soit  $\lambda \in X_r$  et soit  $\chi$  un caractère de  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$ . La représentation  $\mathcal{L}_r(\lambda)$  est un quotient irréductible de  $C_\chi$  si et seulement si la restriction de  $\lambda$  à  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$  est égale à  $\chi$ .

**Exemple 4.3.** — On suppose que  $n$  est égal à 2. Soit  $\lambda = (a, b) \in X_r$ , et écrivons  $a - b$  sous la forme  $e_0 + e_1 p + \dots + e_{r-1} p^{r-1}$  avec  $e_i \in \{0, \dots, p-1\}$ . Alors  $\mathcal{L}_r(\lambda)$  est la représentation irréductible :

$$\mathrm{Sym}^{e_0}(\overline{\mathbf{F}}_p^2) \otimes \dots \otimes \mathrm{Sym}^{e_{r-1}}(\overline{\mathbf{F}}_p^2)^{(r-1)} \otimes \det^b,$$

qui est de dimension  $(e_0 + 1) \dots (e_{r-1} + 1)$ .

On suppose maintenant que  $n = 3$ . On rappelle quelques résultats sur la semi-simplification de  $C_\chi$  pour  $G = \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ .

**Proposition 4.4.** — Soit  $(a, b, c) \in X_1$ . Si :

$$(4.3) \quad 0 \leq a - b, b - c < p - 1 \quad \text{et} \quad p - 1 \leq a - c,$$

alors la représentation  $\mathscr{W}(a, b, c)$  est de longueur 2. Sinon,  $\mathscr{W}(a, b, c)$  est irréductible.

*Démonstration.* — Le résultat est dû à Jantzen : voir [19, Proposition 4.9].  $\square$

On commence par étudier  $C_\chi$  lorsque  $\chi = 1$ . Pour tout  $\lambda \in X_1$ , on note  $\mathscr{W}_1(\lambda)$  la restriction de  $\mathscr{W}(\lambda)$  à  $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ , qui est de longueur  $\leq 2$  d'après la proposition 4.4.

**Proposition 4.5.** — Dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de  $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ , la semi-simplification de  $C'$  est égale à :

$$(4.4) \quad \mathscr{W}_1(0, 0, 0) + 2\mathscr{W}_1(p - 1, 0, 0) + 2\mathscr{W}_1(p - 1, p - 1, 0) + \mathscr{W}_1(2p - 2, p - 1, 0).$$

Chacune des représentations  $\mathscr{W}_1(\lambda)$  apparaissant ci-dessus est irréductible, et on a :

$$(4.5) \quad \dim \mathscr{W}_1(0, 0, 0) = 1,$$

$$(4.6) \quad \dim \mathscr{W}_1(p - 1, 0, 0) = p(p + 1)/2,$$

$$(4.7) \quad \dim \mathscr{W}_1(p - 1, p - 1, 0) = p(p + 1)/2,$$

$$(4.8) \quad \dim \mathscr{W}_1(2p - 2, p - 1, 0) = p^3.$$

*Démonstration.* — Le théorème [19, 5.1] donne la décomposition de la semi-simplification de  $C'$  en une somme de représentations  $\mathscr{W}_1(\lambda)$  et la proposition 4.4 montre que ces représentations sont irréductibles. Plus précisément, ce théorème décrit la décomposition de la semi-simplification de la réduction modulo  $p$  de chacun des facteurs irréductibles de l'induite du  $\mathbf{Z}_p$ -caractère trivial de  $B(\mathbf{F}_p)$  à  $GL_3(\mathbf{F}_p)$  :

- la réduction modulo  $p$  du  $\mathbf{Z}_p$ -caractère trivial de  $GL_3(\mathbf{F}_p)$  est isomorphe à la représentation irréductible  $\mathscr{W}_1(0, 0, 0)$ , qui est de dimension 1 ;
- la réduction modulo  $p$  de la  $\mathbf{Z}_p$ -représentation de Steinberg est isomorphe à la représentation irréductible  $\mathscr{W}_1(2p - 2, p - 1, 0)$ , qui est de dimension  $p^3$  ;
- la  $\mathbf{Z}_p$ -représentation irréductible de  $GL_3(\mathbf{F}_p)$  apparaissant avec multiplicité 2 dans l'induite à  $GL_3(\mathbf{F}_p)$  du  $\mathbf{Z}_p$ -caractère trivial de  $B(\mathbf{F}_p)$  est de dimension  $p^2 + p$ . Sa réduction modulo  $p$  est isomorphe à la somme des deux représentations irréductibles  $\mathscr{W}_1(p - 1, 0, 0)$  et  $\mathscr{W}_1(p - 1, p - 1, 0)$ . Il suffit donc de montrer que ces deux-là ont la même dimension, ce qui découle du fait qu'elles sont duales d'après la proposition 4.1(4).

On en déduit le résultat annoncé. □

On étudie maintenant  $C_\chi$  avec  $\chi$  régulier, c'est-à-dire dont l'orbite sous l'action de  $W_0$  est de cardinal 6.

**Proposition 4.6.** — *Soit  $\chi$  un caractère régulier de  $T(\mathbf{F}_p)$ . Alors  $C_\chi$  est de longueur strictement supérieure à 6 dans la catégorie  $\mathscr{R}(GL_3(\mathbf{F}_p))$ .*

*Démonstration.* — On choisit  $(a, b, c) \in X_1$  tel que :

$$\chi : \begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{pmatrix} \mapsto x^a y^b z^c.$$

Puisque  $\chi$  est régulier, on a  $p > 2$  et l'on peut supposer que  $1 \leq a - b, b - c < p - 1$ . D'après la formule [19, (5.2)], la semi-simplification de  $C_\chi$  est :

$$\begin{aligned} &\mathscr{W}_1(a, b, c) + \mathscr{W}_1(p - 1 + b, p - 1 + c, a) + \mathscr{W}_1(p - 1 + c, a, b) \\ &+ \mathscr{W}_1(2p - 2 + c, p - 1 + b, a) + \mathscr{W}_1(p - 1 + a, p - 1 + c, b) + \mathscr{W}_1(p - 1 + b, a, c). \end{aligned}$$

On vérifie que l'un des deux triplets  $(a, b, c)$  et  $(p - 1 + a, p - 1 + c, b)$  satisfait à la condition (4.3) de la proposition 4.4, de sorte que l'une ou l'autre des représentations :

$$\mathscr{W}_1(a, b, c), \quad \mathscr{W}_1(p - 1 + a, p - 1 + c, b)$$

est de longueur 2, ce qui prouve l'assertion. □

**Remarque 4.7.** — On peut montrer de la même façon que, si l'orbite de  $\chi$  sous l'action de  $W_0$  est de cardinal 3, alors  $C_\chi$  est de longueur  $> 6$ . Compte tenu de la proposition 4.5, on en déduit que  $C_\chi$  est de longueur 6 si et seulement si  $\chi$  est invariant par  $W_0$ .

On en déduit le résultat suivant. Soit  $r \geq 1$  un entier.

**Proposition 4.8.** — *Soit  $(a, b, c) \in X_r$ . La représentation irréductible  $\mathscr{L}_r(a, b, c)$  est isomorphe à un quotient de  $C'$  si et seulement si  $(a, b, c)$  est congru à l'un des poids :*

$$(4.9) \quad (0, 0, 0), (p^r - 1, 0, 0), (p^r - 1, p^r - 1, 0), (2p^r - 2, p^r - 1, 0),$$

modulo  $(p^r - 1)X_0$ . En outre, on a :

$$(4.10) \quad \dim \mathcal{L}_r(0, 0, 0) = 1,$$

$$(4.11) \quad \dim \mathcal{L}_r(p^r - 1, 0, 0) = (p(p+1)/2)^r,$$

$$(4.12) \quad \dim \mathcal{L}_r(p^r - 1, p^r - 1, 0) = (p(p+1)/2)^r,$$

$$(4.13) \quad \dim \mathcal{L}_r(2p^r - 2, p^r - 1, 0) = p^{3r}.$$

*Démonstration.* — La première partie de la proposition est une conséquence du corollaire 4.2. Ensuite, puisque  $p^r - 1 = (p - 1)(1 + p + \dots + p^{r-1})$ , chaque poids  $\lambda$  dans (4.9) se décompose sous la forme (4.1) avec des  $\lambda_i \in X_1$  indépendants de  $i$  et respectivement égaux, suivant  $\lambda$ , à :

$$(4.14) \quad (0, 0, 0), (p - 1, 0, 0), (p - 1, p - 1, 0), (2p - 2, p - 1, 0).$$

Compte tenu de la formule (4.2) et de la proposition 4.5, on trouve les formules annoncées.  $\square$

## 4.2. L'algèbre de Hecke $H'$

D'après [14, 4], la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $H'$  est engendrée par  $S_1 = \tau_{s_1} \varepsilon_1$  et  $S_2 = \tau_{s_2} \varepsilon_1$  avec les relations :

$$S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2, \quad S_1^2 + S_1 = S_2^2 + S_2 = 0.$$

Remarquons que  $S_1$  et  $S_2$  sont les fonctions caractéristiques respectives de  $B_{s_1}B$  et  $B_{s_2}B$ . Dans la suite, on pose  $S_1^* = S_1 + \varepsilon_1$  et  $S_2^* = S_2 + \varepsilon_1$ . On pose :

$$X = -S_1 S_2 S_1, \quad Y = -S_1 S_2^* S_1, \quad Z = -S_1^* S_2 S_1^*, \quad \Omega = S_1^* S_2^* S_1^*.$$

On vérifie que ce sont des idempotents deux à deux orthogonaux de  $H'$  qui décomposent l'unité. Notons que  $X$  et  $\Omega$  sont centraux et qu'on a les relations :

$$Y S_2 = S_2^* Z, \quad S_2 Y = Z S_2^*,$$

qui permettent en particulier de s'assurer que la somme  $Y + Z$  est un idempotent central. Ainsi, les idéaux à droite  $XH'$ ,  $YH'$ ,  $ZH'$  et  $\Omega H'$  sont des  $H'$ -modules projectifs indécomposables.

On sait (voir [12, Theorem 1.25]) que l'application  $\mathfrak{m} \mapsto \text{soc}(\mathfrak{m})$  qui à un  $H'$ -module à droite associe son socle (c'est-à-dire son plus grand sous-module semi-simple) induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de  $H'$ -modules projectifs indécomposables et les classes d'isomorphisme de  $H'$ -modules simples. On va expliciter cette bijection.

**Définition 4.9.** — Pour  $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, -1\} \subseteq \overline{\mathbf{F}}_p$ , on désigne par  $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}$  le caractère de  $H'$  défini par  $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}(S_1) = \alpha_1$  et  $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}(S_2) = \alpha_2$ .

L'application  $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \chi_{\alpha_1, \alpha_2}$  définit une bijection de  $\{0, -1\} \times \{0, -1\}$  sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $H'$ -modules simples.

**Proposition 4.10.** — On a :

$$\text{soc}(XH') = \chi_{-1, -1}, \quad \text{soc}(YH') = \chi_{0, -1}, \quad \text{soc}(ZH') = \chi_{-1, 0}, \quad \text{soc}(\Omega H') = \chi_{0, 0}.$$

*Démonstration.* — On vérifie d'abord que les idéaux bilatères  $XH'$  et  $\Omega H'$  sont de dimension 1 et correspondent respectivement aux caractères  $\chi_{-1, -1}$  et  $\chi_{0, 0}$ . Ensuite, en utilisant la relation  $S_1 S_2^* = -Y S_2^*$ , on vérifie que  $YH' = S_1 S_2^* H'$  est un  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2 de base  $\{Y S_2^*, S_1 S_2^*\}$ . On a la suite exacte non scindée de  $H'$ -modules :

$$(4.15) \quad 0 \rightarrow Y S_2^* H' = S_2^* Z H' \rightarrow YH' \xrightarrow{S_2} S_2 YH' \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire que le  $H'$ -module à droite  $YH'$  est l'enveloppe projective de  $\chi_{0,-1}$ , et c'est une extension non scindée de  $\chi_{-1,0}$  par  $\chi_{0,-1}$ . Le  $H'$ -module à droite  $ZH'$  est l'enveloppe projective de  $\chi_{0,-1}$ . De même, on a la suite exacte de  $H'$ -modules :

$$(4.16) \quad 0 \rightarrow ZS_2^*H' = S_2YH' \rightarrow ZH' \xrightarrow{S_2^*} S_2^*ZH' \rightarrow 0.$$

C'est une extension non scindée de  $\chi_{0,-1}$  par  $\chi_{-1,0}$ . Le  $H'$ -module  $ZH'$  à droite est l'enveloppe projective de  $\chi_{-1,0}$ .  $\square$

Ainsi les idéaux à droite de  $H'$  sont, à isomorphisme près, les  $H'$ -modules projectifs indécomposables  $XH'$ ,  $YH'$ ,  $ZH'$  et  $\Omega H'$ , auxquels s'ajoutent les idéaux non projectifs  $S_2YH'$  et  $YS_2H'$ .

**Remarque 4.11.** — Notons que  $S_2YC' = S_1^*S_2S_1C'$  et  $YS_2C' = S_2^*S_1S_2C'$  de sorte que la classification de Carter et Lusztig ([14, Theorem 7.4]) assure que les représentations irréductibles de  $G$  possédant un vecteur  $B$ -invariant sont, à isomorphisme près :

$$XC', S_2YC', YS_2C', \Omega C'$$

et leurs espaces  $U$ -invariants (donc  $B$ -invariants) respectifs portent les caractères  $\chi_{-1,-1}$ ,  $\chi_{-1,0}$ ,  $\chi_{0,-1}$ ,  $\chi_{0,0}$  de  $H'$ .

### 4.3. Platitude de $C'$

Rappelons que  $H'$  est une algèbre de Frobenius. Un  $H'$ -module de type fini est donc plat si et seulement s'il est projectif, ou encore si et seulement s'il est injectif. On a le résultat suivant.

**Proposition 4.12.** — *Le  $H'$ -module  $C'$  est plat si et seulement si  $q = p$ .*

*Démonstration.* — On note  $q$  le cardinal de  $k$ . Rappelons que  $C'$  est de dimension :

$$(G : B) = (1 + q)(1 + q + q^2).$$

En tant que  $H'$ -module, c'est la somme directe de  $XC'$ ,  $(Y + Z)C'$  et  $\Omega C'$ . D'après le paragraphe 3.5,  $XC'$  est la représentation de Steinberg. Elle est irréductible et de dimension  $q^3$ . On déduit du paragraphe précédent que le  $H'$ -module  $XC'$  est isomorphe à une somme directe de  $q^3$  copies de  $H'X$ . C'est un  $H'$ -module projectif.

L'élément  $\Omega$  s'identifie dans  $C'$  à la fonction caractéristique de  $G$ . On en déduit que  $\Omega C'$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel  $G$  agit trivialement (voir le paragraphe 3.5). En tant que  $H'$ -module,  $\Omega C'$  est isomorphe à  $H'\Omega$  et c'est un  $H'$ -module projectif.

La sous-représentation  $S_1^*C' \subseteq C'$  est engendrée par la fonction caractéristique du sous-groupe parabolique  $P_1 = B \cup Bs_1B$  de  $G$ . Elle est donc isomorphe à l'induite  $\mathbb{I}_{P_1}(1)$  qui est de dimension  $(G : P_1) = 1 + q + q^2$ . Or  $S_1^*C'$  est la somme directe de  $ZC'$  et  $\Omega C'$ , donc  $ZC'$  est de dimension  $q + q^2$ . Ainsi, la dimension de  $YC'$  est aussi  $q + q^2$ .

Le noyau de la restriction de  $S_2$  à  $YC'$  contient  $YS_2C' = S_2^*ZC'$ , et le noyau de la restriction de  $S_2^*$  à  $ZC'$  contient  $S_2YC' = ZS_2^*C'$ . On a les complexes :

$$(4.17) \quad 0 \rightarrow YS_2C' \rightarrow YC' \xrightarrow{S_2} S_2YC' \rightarrow 0$$

et :

$$(4.18) \quad 0 \rightarrow ZS_2^*C' \rightarrow ZC' \xrightarrow{S_2^*} S_2^*ZC' \rightarrow 0$$

de représentations de  $G$ , dont nous discutons l'exactitude. D'après la remarque 4.11, les représentations  $YS_2C'$  et  $S_2YC'$  sont irréductibles. Comme elles ne sont isomorphes ni au caractère trivial, ni à la représentation de Steinberg, elles sont donc (d'après la proposition 4.8) de dimension :

$$(p(p + 1)/2)^r,$$



où l'on a posé  $q = p^r$ . Par conséquent, chacun des complexes est exact si et seulement si  $q = p$ .

Le  $H'$ -module à gauche  $(Y + Z)C'$  est projectif si et seulement si, pour tout idéal à droite  $A \subseteq H'$ , l'application :

$$A \otimes_{H'} (Y + Z)C' \rightarrow C'$$

est injective. Il suffit de tester cette propriété sur les idéaux indécomposables de  $H'$ , et, puisque  $X, Y, Z$  et  $\Omega$  sont des idempotents orthogonaux, seuls les cas des idéaux  $S_2YH'$  et  $S_2^*ZH'$  nécessitent une vérification. Traitons le cas de  $S_2YH'$  en utilisant les complexes (4.15) et (4.17). Le cas de  $S_2^*ZH'$  s'obtient de façon analogue en utilisant les complexes (4.16) et (4.18).

D'après [5, I.2.11], un élément  $S_2Y \otimes c \in S_2Y \otimes_{H'} (Y + Z)C'$  est nul si et seulement s'il existe une famille finie  $(h_i)_i$  de  $H'$  et une famille finie  $(c_i)_i$  de  $(Y + Z)C'$  telles que  $c = \sum_i h_i c_i$  et  $S_2Y h_i = 0$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire, d'après l'exactitude de (4.15), si et seulement si  $c \in YS_2C' + ZC'$ . Si  $q = p$ , le complexe (4.17) est exact, donc cette condition est équivalente à  $S_2Yc = 0$  et l'homomorphisme  $S_2Y \otimes_{H'} (Y + Z)C' \rightarrow C'$  est injectif. Si  $q \neq p$ , tensoriser (4.15) par le  $H'$ -module  $(Y + Z)C'$  donne le complexe (4.17) qui n'est pas exact. Donc  $(Y + Z)C'$  n'est pas plat. La proposition 4.12 est démontrée.  $\square$

#### 4.4. Platitude de $C$

On a le résultat suivant.

**Proposition 4.13.** — *Le  $H$ -module  $C$  est plat si et seulement si  $q = p = 2$ .*

*Démonstration.* — Le fait que  $C$  n'est pas plat sur  $H$  lorsque  $q$  est différent de  $p$  est donné par le corollaire 3.22. On suppose maintenant que  $q = p$ .

Supposons que  $p = 2$ . Dans ce cas, le groupe  $\hat{T}$  est réduit au caractère trivial, et  $C$  est égal à  $C'$ . D'après la proposition 1.22 et la proposition 4.12, le  $H$ -module  $C$  est plat.

Supposons que  $p > 2$ , et soit  $\chi \in \hat{T}$  un caractère de  $T$ . Le  $H$ -module correspondant à  $C_\chi$  est  $\varepsilon_\chi H$ , qui est de dimension 6 et de base  $\{\varepsilon_\chi \tau_w \mid w \in W_0\}$  en tant que  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel. Puisque tous les  $H$ -modules simples sont de dimension 1 (voir par exemple [12, Theorem 6.10 (iii)]), ce module est de longueur 6 dans  $\mathcal{M}$ . Si  $C$  était un  $H$ -module plat, le foncteur  $\mathcal{F}$  des  $U$ -invariants fournirait, d'après la proposition 1.18, une équivalence entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{M}$ . Pour montrer que  $C$  n'est pas un module plat, il suffit donc de trouver un caractère  $\chi$  tel que la représentation  $C_\chi$  de  $G$  soit de longueur strictement supérieure à 6 dans  $\mathcal{E}$ . Remarquons que, puisque toute représentation non nulle de  $G$  admet un vecteur  $U$ -invariant non trivial, les éléments irréductibles des catégories  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{R}$  coïncident. Il suffit donc de trouver  $\chi$  tel que  $C_\chi$  est de longueur strictement supérieure à 6 dans  $\mathcal{R}$ , ce qui a été fait à la proposition 4.6.  $\square$

Associé au corollaire 3.21, ce résultat fournit le corollaire suivant.

**Corollaire 4.14.** — *On suppose que  $q \neq 2$ . Alors, pour tout  $n \geq 3$ , le  $H^{(n)}$ -module  $C^{(n)}$  n'est pas plat.*

On peut traiter le cas de  $C'$  de façon analogue. On note  $C'^{(n)}$  et  $H'^{(n)}$  les quantités  $C'$  et  $H'$  associées à  $G = GL_n(k)$  pour  $n \geq 1$ . On déduit de la proposition 4.12 le résultat suivant.

**Corollaire 4.15.** — *On suppose que  $q \neq p$ . Alors, pour tout  $n \geq 3$ , le  $H'^{(n)}$ -module  $C'^{(n)}$  n'est pas plat.*

Concluons ce premier volet de l'article consacré aux représentations du groupe linéaire général fini en rassemblant les résultats des propositions 1.18, 1.24, 2.1, 2.2, 4.12, 4.13 et des deux corollaires précédents.

**Proposition 4.16.** — *On a les résultats suivants.*

- (1) Pour  $n = 2$ , le  $H'$ -module  $C'$  est plat.
- (2) Pour  $n = 2$ , le  $H$ -module  $C$  est plat si et seulement si  $q = p$ .
- (3) Pour  $n = 3$ , le  $H'$ -module  $C'$  est plat si et seulement si  $q = p$ .
- (4) Pour  $n = 3$ , le  $H$ -module  $C$  est plat si et seulement si  $q = 2$ .
- (5) Pour  $n \geq 4$  et  $q \neq p$ , le  $H'$ -module  $C'$  n'est pas plat.
- (6) Pour  $n \geq 4$  et  $q \neq 2$ , le  $H$ -module  $C$  n'est pas plat.

On a enfin le théorème suivant.

**Théorème 4.17.** — Soit  $n \geq 2$ .

- (1) Si  $n = 2$  et  $q = p$ , ou si  $n = 3$  et  $q = 2$ , le foncteur  $\mathcal{F}$  des  $U$ -invariants est une équivalence de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{M}$ .
- (2) Si  $n \geq 3$  et  $q \neq 2$ , ce foncteur n'est pas une équivalence de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{M}$ .
- (3) Si  $n = 2$ , ou si  $n = 3$  et  $q = p$ , le foncteur  $\mathcal{F}$  est une équivalence de  $\mathcal{E}'$  dans  $\mathcal{M}'$ .
- (4) Si  $n \geq 3$  et  $q \neq p$ , ce foncteur n'est pas une équivalence de  $\mathcal{E}'$  dans  $\mathcal{M}'$ .

## 5. Représentations de $GL_n$ sur un corps $p$ -adique

### 5.1. Préliminaires

**5.1.1.** — Soit  $F$  un corps localement compact non archimédien de corps résiduel  $k$ . On note  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $F$  et  $\mathfrak{p}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ . On note  $q$  le cardinal de  $k$  et on fixe une uniformisante  $\varpi$  de  $F$ .

Étant donné  $n \geq 1$ , on pose  $\tilde{G} = GL_n(F)$  et l'on note  $\tilde{Z}$  le centre de  $\tilde{G}$ . On pose  $K = GL_n(\mathcal{O})$ . Son image par réduction modulo  $\mathfrak{p}$  est le groupe  $G = GL_n(k)$  des sections précédentes. On note  $I$  le sous-groupe de  $K$  constitué des matrices dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}$  est triangulaire supérieure, c'est-à-dire égale à  $B$ . C'est le sous-groupe d'Iwahori (supérieur) standard. Son unique pro- $p$ -sous-groupe de Sylow est noté  $I_1$ , c'est l'ensemble des matrices dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}$  est unipotente supérieure, c'est-à-dire égale à  $U$ . On l'appelle le pro- $p$ -sous-groupe d'Iwahori de  $\tilde{G}$ . Pour  $m \geq 1$ , on pose  $K_m = 1 + \mathfrak{p}^m M_n(\mathcal{O})$ .

Par *représentation* de  $\tilde{G}$  ou de l'un de ses sous-groupes fermés, on entendra représentation lisse à coefficients dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$ .

On note  $\tilde{B}$  le sous-groupe de Borel de  $\tilde{G}$  des matrices triangulaires supérieures, de décomposition de Levi  $\tilde{B} = \tilde{T}\tilde{U}$  où  $\tilde{T}$  désigne le tore diagonal et  $\tilde{U}$  le sous-groupe unipotent supérieur de  $\tilde{G}$ . On identifie le tore fini  $T$  de  $G$  avec un sous-groupe de  $\tilde{T}$  grâce au relèvement de Teichmüller de  $k^\times$  dans  $\mathcal{O}^\times$ .

On désigne par  $\Lambda$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  des matrices diagonales dont les coefficients non nuls sont des puissances de  $\varpi$ , et par  $\Lambda^{(1)}$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  engendré par  $\Lambda$  et  $T$ . On note  $\tilde{W}$  le produit semi-direct de  $W_0$  par  $\Lambda^{(1)}$ . Il s'identifie à un sous-groupe de  $\tilde{G}$  qui constitue un système de représentants des doubles classes de  $\tilde{G}$  modulo  $I_1$ .

Notons que le groupe de Weyl affine étendu, système de représentants des doubles classes de  $\tilde{G}$  modulo le sous-groupe d'Iwahori  $I$ , est le sous-groupe de  $\tilde{W}$  engendré par  $W_0$  et  $\Lambda$ . On le notera  $\tilde{W}'$ .

On considère la donnée radicielle affine associée à  $(\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{T})$ . On se réfère à [27, 1] par exemple. Les racines s'identifient avec celles de la donnée radicielle finie décrite au paragraphe 1.2 et l'on note à nouveau  $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$  leur ensemble. Le sous-ensemble des racines positives  $\Phi^+$  est le semi-groupe engendré par l'ensemble des racines simples  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ . On considère la racine  $\alpha_i$  comme le morphisme  $\Lambda \rightarrow \mathbf{Z}$  défini par :

$$\alpha_i : \text{diag}(\varpi^{x_1}, \varpi^{x_2}, \dots, \varpi^{x_n}) \mapsto x_{i+1} - x_i.$$

Il s'étend par inflation en un morphisme  $\alpha_i : \Lambda^{(1)} \rightarrow \mathbf{Z}$ . L'action naturelle de  $W_0$  sur  $\Lambda^{(1)}$  induit une action de  $W_0$  sur l'ensemble des racines que l'on note  $(w_0, \alpha) \mapsto w_0 \cdot \alpha$ .

On définit comme dans [27] l'ensemble des racines affines par  $\tilde{\Phi} := \Phi \times \mathbf{Z}$ . On considère  $\Phi$  comme un sous-ensemble de  $\tilde{\Phi}$  en identifiant  $\alpha \in \Phi$  avec  $(\alpha, 0) \in \tilde{\Phi}$ . L'action de  $\tilde{W}$  sur l'ensemble des racines affines est définie comme suit :

$$w_0 \cdot \lambda : (\alpha, k) \mapsto (w_0 \alpha, k - \alpha(\lambda)).$$

Les ensembles des racines affines positives et négatives sont respectivement :

$$\tilde{\Phi}^+ := \{(\alpha, k), \alpha \in \Phi, k > 0\} \cup \{(\alpha, 0), \alpha \in \Phi^+\},$$

$$\tilde{\Phi}^- := \{(\alpha, k), \alpha \in \Phi, k < 0\} \cup \{(\alpha, 0), \alpha \in \Phi^-\}.$$

Le groupe  $\tilde{W}$  est muni d'une longueur  $\ell$  qui prolonge la longueur sur  $W$  décrite au paragraphe 1.2 (on se réfère à [27, §1.4] qui définit la longueur sur  $\tilde{W}'$  ; pour l'extension au cas de  $\tilde{W}$ , voir [40, §1.2]). La longueur d'un élément  $w \in \tilde{W}$  est le nombre de racines affines positives rendues négatives sous l'action de  $w$ .

Le résultat suivant provient de [31, Proposition 2.5].

**Proposition 5.1.** — *Il existe un système de représentants  $\mathcal{D}$  des classes à gauche  $\tilde{W}'/W_0$  tel que pour tout  $d \in \mathcal{D}$  et  $w \in W_0$ , on a :*

$$\ell(dw) = \ell(d) + \ell(w).$$

Chaque  $d \in \mathcal{D}$  est l'unique élément de longueur minimale dans  $dW_0$ .

**Remarque 5.2.** — (1) Puisque les éléments de  $T$  sont de longueur nulle dans  $\tilde{W}$ , l'ensemble  $\mathcal{D}$  est aussi un système de représentants des classes à gauche  $\tilde{W}/W$ . Chaque  $d \in \mathcal{D}$  est de longueur minimale dans  $dW$  mais il y a d'autres éléments de même longueur dans cet ensemble.

(2) L'ensemble  $\mathcal{D}$  est un système de représentants des doubles classes  $I_1 \backslash \tilde{G}/K$ .

(3) D'après la preuve de la proposition *loc. cit.*, l'ensemble  $\mathcal{D} \subseteq \tilde{W}'$  est exactement l'ensemble des  $d \in \tilde{W}'$  tels que  $d\Phi^+ \subseteq \tilde{\Phi}^+$ . Par définition de l'action de  $\tilde{W}$  sur les racines affines, cela signifie que  $d \in \mathcal{D}$  si et seulement si  $d \in \tilde{W}'$  et  $d(I_1 \cap \tilde{U})d^{-1} \subseteq I_1$ .

La propriété suivante est prouvée par [31, Proposition 2.7].

**Lemme 5.3.** — *Soient  $d \in \mathcal{D}$  et  $s \in S_0$ . Si  $\ell(sd) = \ell(d) - 1$  alors  $sd \in \mathcal{D}$ . Si  $\ell(sd) = \ell(d) + 1$  alors  $sd \in \mathcal{D}$  ou bien  $sdW_0 = dW_0$ .*

**5.1.2.** — On note  $\mathcal{C} = \text{ind}_{I_1}^{\tilde{G}}(1)$  la représentation de  $\tilde{G}$  obtenue par induction compacte à partir du caractère trivial de  $I_1$ . Elle s'identifie à l'espace des fonctions à support fini sur les classes à droite  $I_1 \backslash \tilde{G}$  muni de l'action de  $\tilde{G}$  par translation à droite. On note  $\mathcal{H} = \text{End}_{\tilde{G}}(\mathcal{C})$  la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre de ses  $\tilde{G}$ -endomorphismes. Par réciprocity de Frobenius,  $\mathcal{H}$  s'identifie canoniquement à l'espace  $\mathcal{C}^{I_1}$  des fonctions de  $\tilde{G}$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$  qui sont invariantes par  $I_1$  par translations à droite et à gauche, muni du produit de convolution d'unité  $\mathbf{1}_{I_1}$ .

Le module universel fini  $C$  attaché au couple  $(G, U)$ , dont on a étudié les propriétés comme représentation de  $G$  et comme  $H$ -module dans les sections 1 à 4, est maintenant vu comme une représentation de  $K$  qui se factorise par l'action triviale de  $K_1$ . Comme telle, on l'identifie au sous-espace  $\text{ind}_{I_1}^K(1)$  des fonctions de  $\mathcal{C}$  à support dans  $K$ . En considérant les espaces des vecteurs  $I_1$ -invariants de ces représentations, cette identification fournit une injection naturelle de l'algèbre de Hecke finie  $H$  dans  $\mathcal{H}$ . On assimilera désormais  $H$  à son image dans  $\mathcal{H}$  : c'est la sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  engendrée par les fonctions caractéristiques des doubles classes de la forme

$I_1 w I_1$  pour  $w \in W \subseteq \tilde{W}$ . Ainsi, on étend en toute légitimité les notations du paragraphe 1.2 : les fonctions caractéristiques :

$$\tau_w = \mathbf{1}_{I_1 w I_1}, \quad w \in \tilde{W},$$

forment une base de  $\mathcal{H} = \mathcal{C}^{I_1}$  comme  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel.

On a :

$$(5.1) \quad \tau_w \tau_{w'} = \tau_{ww'} \text{ pour tous les éléments } w, w' \in \tilde{W} \text{ vérifiant } \ell(w) + \ell(w') = \ell(ww').$$

Avec celles de la remarque 1.21, ce sont les seules relations dans  $\mathcal{H}$  dont nous ferons usage. On trouve dans [40] une présentation de  $\mathcal{H}$  par générateurs et relations.

On note  $X$  l'immeuble de Bruhat-Tits affine réduit de  $\tilde{G}$  sur  $F$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  on note  $X_i$  l'ensemble des simplexes, ou encore *facettes*, de  $X$  de dimension  $i$ . Il est muni d'une action de  $\tilde{G}$ . Les chambres de  $X$  sont les facettes de dimension maximale  $n-1$ , les sommets de  $X$  sont les facettes de dimension 0. Ces derniers sont en bijection avec les classes d'homothétie des  $\mathcal{O}$ -réseaux de  $F^n$ . On note  $\sigma_0$  le sommet correspondant à la classe d'homothétie du réseau  $\mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_n$  engendré par la base canonique de  $F^n$  et l'on choisit  $\sigma_0$  pour origine de l'immeuble. On appelle *appartement standard* de  $X$  le complexe simplicial dont les sommets correspondent aux réseaux de la forme  $\varpi^{k_1} \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \varpi^{k_n} \mathcal{O}e_n$ , avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$ , formés sur la base canonique. Un appartement de  $X$  est un conjugué de l'appartement standard sous l'action de  $\tilde{G}$ .

Rappelons que deux sommets  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont voisins s'il existe des réseaux  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  de  $F^n$  correspondant respectivement à  $\sigma$  et  $\sigma'$  tels que  $\varpi \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ . On dira que deux sommets voisins sont à distance 1 l'un de l'autre et la distance combinatoire entre deux sommets quelconques est alors définie par récurrence comme dans [2, 2.1.3]. Lorsque l'on dira qu'un sommet  $\sigma \in X_0$  est à distance  $m \in \mathbf{N}$ , il sera sous-entendu qu'il est à distance  $m$  de l'origine. De même, on parlera la boule de rayon  $m$  sans préciser qu'il s'agit de la boule fermée centrée en  $\sigma_0$ , qui contient exactement tous les sommets à distance  $\leq m$ .

L'immeuble  $X$  est étiquetable, comme rappelé par exemple dans [10, 2] : il existe une application simpliciale  $\lambda : X \rightarrow \Delta_{n-1}$  qui respecte la dimension des simplexes, où  $\Delta_{n-1}$  est le simplexe standard construit sur  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Un étiquetage de  $X$  est unique à un automorphisme de  $\Delta_{n-1}$  près et l'on en fixe un pour la suite. Pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , soit  $\tau = \{t_0, \dots, t_{i-1}\}$  un simplexe de dimension  $i-1$  contenu dans un simplexe  $\sigma = \{s_0, \dots, s_i\}$  de dimension  $i$ . Alors le nombre d'incidence  $[\sigma, \tau]$  de  $\tau$  dans  $\sigma$  est défini comme suit :

$$[\sigma, \tau] = (-1)^j \text{ si } \{\lambda(s_0), \dots, \lambda(s_i)\} - \{\lambda(t_0), \dots, \lambda(t_i)\} = \{j\}.$$

À toute facette  $\sigma$  de  $X$  correspond un pro- $p$ -sous-groupe  $U_\sigma$  de  $\tilde{G}$  ([34, §1]), qui est le pro- $p$ -radical du sous-groupe parahorique compact de  $\tilde{G}$  fixant  $\sigma$  point par point. Pour tout  $g \in \tilde{G}$ , on a  $U_{g \cdot \sigma} = g U_\sigma g^{-1}$ . Suivant [34, §1], pour chaque entier  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et toute représentation  $V$  de  $\tilde{G}$ , on pose :

$$(5.2) \quad \mathcal{F}_i(X, V) = \bigoplus_{\sigma \in X_i} V^{U_\sigma}.$$

Cet espace est appelé l'espace des  *$i$ -chaînes* associé à  $V$  et il est muni d'une structure de représentation de  $\tilde{G}$ . Plus précisément, si  $g \in \tilde{G}$  et si  $f \in \mathcal{F}_i(X, V)$ , alors  $gf$  est la fonction définie par  $\sigma \mapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot \sigma)$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on définit une application de transition :

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \partial_i : \mathcal{F}_i(X, V) &\rightarrow \mathcal{F}_{i-1}(X, V) \\ f &\mapsto \left( \tau \mapsto \sum_{\tau \subseteq \sigma \in X_i} [\sigma : \tau] f(\sigma) \right). \end{aligned}$$

Cette application est équivariante sous l'action du sous-groupe de  $\tilde{G}$  des éléments à déterminant inversible dans  $\mathcal{O}$ . On a ainsi un complexe augmenté :

$$(5.4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}(X, V) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_0(X, V) \xrightarrow{\alpha} V \rightarrow 0,$$

où  $\alpha$  désigne l'homomorphisme d'augmentation défini par :

$$\alpha(f) = \sum_{\dim(\sigma)=0} f(\sigma).$$

Ce complexe est appelé le *système de coefficients* associé à la représentation  $V$  de  $\tilde{G}$ .

Si l'on choisit  $V = \mathcal{C}$ , l'espace (5.2) est un  $\mathcal{H}$ -module à gauche ( $\mathcal{H}$  opère sur (5.2) composante par composante), les applications de transition (5.3) sont  $\mathcal{H}$ -linéaires et :

$$(5.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

est un complexe de  $\mathcal{H}$ -modules qui est exact d'après la preuve du théorème de [34, §3].

On note  $\mathcal{C}' = \text{ind}_I^{\tilde{G}}(1)$  l'induite compacte du caractère trivial de  $I$ . Elle s'identifie à l'espace des fonctions à support fini dans  $I \backslash \tilde{G}$  muni de l'action de  $\tilde{G}$  par translation à droite. On note  $\mathcal{H}'$  la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre de ses  $\tilde{G}$ -endomorphismes. Par réciprocity de Frobenius, elle s'identifie à l'espace  $\mathcal{C}'$  des fonctions de  $\tilde{G}$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$  qui sont invariantes par  $I$  par translations à droite et à gauche, muni du produit de convolution d'unité  $\mathbf{1}_I$ .

**Remarque 5.4.** — Au paragraphe 1.4, nous avons introduit l'idempotent central  $\varepsilon_1$  de  $\mathcal{H}$ . Vu comme élément de  $\mathcal{H}$ , c'est encore un idempotent central et il correspond à la projection naturelle de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{C}'$ . Ainsi  $\varepsilon_1 \mathcal{H}$  est un facteur direct de  $\mathcal{H}$  comme  $\mathcal{H}$ -module à droite et  $\mathcal{C}'$  est un facteur direct de  $\mathcal{C}$  comme  $\mathcal{H}$ -module à gauche.

Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 5.5.** — *Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a :*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \mathcal{F}_i(X, \mathcal{C}) &= \mathcal{F}_i(X, \mathcal{C}'), \\ \varepsilon_1 \text{Im}(\partial_i) &= \partial_i(\mathcal{F}_i(X, \mathcal{C}')), \\ \varepsilon_1 \text{Ker}(\partial_i) &= \text{Ker}(\partial_i) \cap \mathcal{F}_i(X, \mathcal{C}'). \end{aligned}$$

Le complexe (5.5) donne donc un complexe augmenté de  $\mathcal{H}'$ -modules :

$$(5.6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}(X, \mathcal{C}') \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C}') \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}' \rightarrow 0$$

qui est également exact.

**5.1.3.** — Notons  $z := \text{diag}(\varpi, \dots, \varpi)$ . C'est un élément du centre de  $\tilde{G}$  que l'on considère comme un élément de  $\tilde{W}$  (de longueur nulle). La sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  engendrée par  $\tau_z$  et  $\tau_z^{-1}$  est notée  $\mathcal{Z}$ . Elle est isomorphe à l'anneau des séries de Laurent en la variable  $\tau_z$  et à coefficients dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$ . On a immédiatement le résultat suivant.

**Lemme 5.6.** — (1) *Le  $\mathcal{Z}$ -module à gauche  $\mathcal{C}$  est libre de base  $\{\mathbf{1}_{11g}\}_g$ , où  $g$  décrit un système de représentants des classes à droite  $I_1 \varpi^{\mathbf{Z}} \backslash \tilde{G}$ .*

(2) *Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K'$  de  $K$ , le  $\mathcal{Z}$ -module à gauche  $\mathcal{C}^{K'}$  est libre de base  $\{\mathbf{1}_{11gK'}\}_g$ , où  $g$  décrit un système de représentants des doubles classes  $I_1 \varpi^{\mathbf{Z}} \backslash \tilde{G} / K'$ .*

On considère la représentation  $\underline{\mathcal{C}} = \text{ind}_{I_1 \varpi^{\mathbb{Z}}}^{\tilde{G}} 1$  induite du caractère trivial de  $I_1 \varpi^{\mathbb{Z}}$  à  $\tilde{G}$ . Notant  $\mathbf{1}_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  le caractère de  $\mathcal{Z}$  qui associe 1 à  $\tau_z$ , on a des isomorphismes :

$$(5.7) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}/(\tau_z - 1)\mathcal{C} \simeq \underline{\mathcal{C}}$$

de représentations de  $\tilde{G}$ , le second étant induit par l'application de  $\mathcal{C}$  dans  $\underline{\mathcal{C}}$  envoyant la fonction caractéristique de  $I_1$  sur celle de  $I_1 \varpi^{\mathbb{Z}}$ .

Notons  $\underline{\mathcal{H}}$  l'algèbre-quotient de  $\mathcal{H}$  par l'idéal bilatère engendré par  $\tau_z - 1$ . Elle s'identifie naturellement à l'algèbre des  $\tilde{G}$ -endomorphismes de  $\underline{\mathcal{C}}$ . Une base en est donnée par les fonctions caractéristiques des doubles classes  $I_1 \varpi^{\mathbb{Z}} w I_1$  où  $w$  décrit un système de représentants du quotient de  $\tilde{W}$  par le sous-groupe  $z^{\mathbb{Z}}$  engendré par  $z$ . L'algèbre de Hecke finie  $H$  s'injecte dans  $\underline{\mathcal{H}}$  puisque  $W$  s'injecte dans le quotient de  $\tilde{W}$  par  $z^{\mathbb{Z}}$ . Ainsi, les idempotents  $\varepsilon_{\chi}$  de  $\mathcal{H}$  définis au paragraphe 1.4 s'identifient à des idempotents de  $\underline{\mathcal{H}}$ .

**Lemme 5.7.** — *Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K'$  de  $K$ , on a des isomorphismes de  $\underline{\mathcal{H}}$ -modules à gauche :*

$$(5.8) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{C}^{K'} \simeq \mathcal{C}^{K'}/(\tau_z - 1)\mathcal{C}^{K'} \simeq \underline{\mathcal{C}}^{K'}$$

*Démonstration.* — La restriction du morphisme naturel  $\mathcal{C} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$  envoie surjectivement  $\mathcal{C}^{K'}$  sur  $\underline{\mathcal{C}}^{K'}$ . Il reste à prouver que  $(\tau_z - 1)\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^{K'}$  est égal à  $(\tau_z - 1)\mathcal{C}^{K'}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est libre sur l'anneau intègre  $\mathcal{Z}$ , il est sans  $\mathcal{Z}$ -torsion: soit  $c \in \mathcal{C}$  tel que  $(\tau_z - 1)c$  est  $K'$ -invariant; pour tout  $u \in K'$ , on a  $(\tau_z - 1)(uc - c) = 0$  et donc  $uc - c = 0$ .  $\square$

La représentation  $\underline{\mathcal{C}}$  contient la représentation induite  $\underline{\mathcal{C}}' = \text{ind}_{I_1 \mathbb{Z}}^{\tilde{G}} 1$  qui s'identifie au quotient  $\mathcal{C}'/(\tau_z - 1)\mathcal{C}'$  ou encore à  $\varepsilon_1 \underline{\mathcal{C}}$ . L'algèbre de ses  $\tilde{G}$ -endomorphismes s'identifie à l'algèbre-quotient  $\underline{\mathcal{H}}' := \mathcal{H}'/(\tau_z - 1)\mathcal{H}'$  ou encore à  $\varepsilon_1 \underline{\mathcal{H}}$ .

**Remarque 5.8.** — Le  $\underline{\mathcal{H}}$ -module  $\underline{\mathcal{C}}$  étant isomorphe à  $\underline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}$ , la platitude (respectivement la projectivité) du  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}$  implique celle du  $\underline{\mathcal{H}}$ -module  $\underline{\mathcal{C}}$ .

Les espaces de chaînes intervenant dans le complexe (5.6) étant des  $\mathcal{Z}$ -modules libres, on a la proposition suivante.

**Proposition 5.9.** — *On a deux complexes exacts de représentations de  $\tilde{G}$  et de  $\underline{\mathcal{H}}$ -modules à gauche :*

$$(5.9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}(X, \underline{\mathcal{C}}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}) \rightarrow \underline{\mathcal{C}} \rightarrow 0$$

et :

$$(5.10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}(X, \underline{\mathcal{C}}') \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}') \rightarrow \underline{\mathcal{C}}' \rightarrow 0$$

obtenus en tensorisant respectivement (5.5) et (5.6) par le caractère  $\mathbf{1}_{\mathcal{Z}}$  de  $\mathcal{Z}$ .

## 5.2. L'espace des vecteurs $K_1$ -invariants de $\mathcal{C}$

Dans ce paragraphe, on donne une description de l'espace des vecteurs  $K_1$ -invariants de  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 5.10.** — *L'espace des vecteurs  $K_1$ -invariants de  $\mathcal{C}$  est engendré en tant que  $\mathcal{H}$ -module par les  $x \cdot \mathbf{1}_{I_1}$ , avec  $x \in \tilde{G}$  vérifiant  $x^{-1}K_1x \subseteq I_1$ , c'est-à-dire par les  $\mathbf{1}_{I_1x}$ , avec  $x \in \tilde{G}$  vérifiant  $I_1xK_1 = I_1x$ .*

**Remarque 5.11.** — Ce résultat, ainsi que la preuve que nous en donnons, est valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, non nécessairement  $p$ .

*Démonstration.* — Comme espace vectoriel, l'espace des vecteurs  $K_1$ -invariants de  $\mathcal{C}$  est engendré par les fonctions caractéristiques de la forme  $\mathbf{1}_{I_1 g K_1}$ , avec  $g \in \tilde{G}$ . Si  $f = \mathbf{1}_{I_1 g K_1}$  est une telle fonction, il suffit de montrer qu'il existe une fonction  $K_1$ -invariante de la forme  $e = \mathbf{1}_{I_1 x}$ , avec  $x \in \tilde{G}$  vérifiant  $I_1 x K_1 = I_1 x$ , telle qu'on ait  $f \in \mathcal{H} \cdot e$ . Puisque  $\mathcal{H} \cdot e$  est l'espace des vecteurs de  $\mathcal{C}$  invariants par  $x^{-1} I_1 x$ , cela revient à montrer qu'il y a un élément  $x \in \tilde{G}$  tel que  $x^{-1} I_1 x$  fixe  $f$  et contienne  $K_1$  c'est-à-dire tel que

$$K_1 \subseteq x^{-1} I_1 x \subseteq g^{-1} I_1 g K_1.$$

Par la décomposition de Bruhat, l'élément  $g$  se décompose dans  $\tilde{G} = I_1 \tilde{W} I_1$ . De plus, tout élément de  $\tilde{W}$  s'écrit comme un produit d'un élément de  $\mathcal{D}$  défini par la proposition 5.1 et d'un élément de  $W$  qui est inclus dans  $K$ . Puisque  $K$  normalise  $K_1$ , on peut se ramener au cas où  $g$  est un élément de  $\mathcal{D}$ . D'après la remarque 5.2, on a alors

$$(5.11) \quad g(I_1 \cap \tilde{U})g^{-1} \subset I_1.$$

On note  $\tilde{U}^-$  le sous-groupe unipotent opposé à  $\tilde{U}$  relativement à  $\tilde{T}$  et l'on écrit la décomposition d'Iwahori :

$$I_1 = (I_1 \cap \tilde{U}) \cdot (I_1 \cap \tilde{T}) \cdot (I_1 \cap \tilde{U}^-).$$

Les deux derniers facteurs sont contenus dans  $K_1$  de sorte que (5.11) implique

$$I_1 \subseteq g^{-1} I_1 g K_1.$$

Autrement dit,  $x = 1$  convient. □

### 5.3. Du cas fini au cas $p$ -adique

**5.3.1.** Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 5.1.

**Proposition 5.12.** — *L'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}$  est un module à droite (respectivement à gauche) libre de base  $\{\tau_d\}_{d \in \mathcal{D}}$  (respectivement  $\{\tau_{d^{-1}}\}_{d \in \mathcal{D}}$ ) sur l'algèbre de Hecke finie  $H$ , où l'ensemble  $\mathcal{D}$  est défini par la proposition 5.1.*

**Remarque 5.13.** — Le sous-espace  $\tau_d H$  de  $\mathcal{H}$  est exactement celui des fonctions  $I_1$ -invariantes à support dans  $I_1 d K$ .

**Remarque 5.14.** — Notons  $\langle H, \mathcal{Z} \rangle$  la sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  engendrée par  $H$  et  $\tau_z, \tau_z^{-1}$ . Remarquons que l'on peut trouver un sous-ensemble  $\underline{\mathcal{D}}$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $\underline{\mathcal{D}}$  est un système de représentants des doubles classes  $I\tilde{Z}\backslash\tilde{G}/K$ . L'algèbre  $\mathcal{H}$  est un module à droite (respectivement à gauche) libre de base  $\{\tau_d\}_{d \in \underline{\mathcal{D}}}$  (respectivement  $\{\tau_{d^{-1}}\}_{d \in \underline{\mathcal{D}}}$ ) sur la sous-algèbre  $\langle H, \mathcal{Z} \rangle$ . En tensorisant par le caractère  $\mathbf{1}_{\mathcal{Z}}$  défini au paragraphe 5.1.3, il apparaît que  $\underline{\mathcal{H}}$  est un  $H$ -module libre. De même,  $\underline{\mathcal{H}'}$  est un  $H'$ -module libre.

**5.3.2.** On déduit de la proposition 5.12 les deux lemmes suivants.

**Lemme 5.15.** — *Tout  $H$ -module à gauche  $\mathfrak{m}$  est un facteur direct de la restriction de  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  à  $H$ .*

*Démonstration.* — Comme le lemme 3.23 a été prouvé grâce au lemme 3.5, on prouve le présent résultat en utilisant le lemme 5.3. Par la proposition 5.12, l'espace vectoriel  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  s'identifie à la somme directe des  $\tau_d \mathfrak{m}$  pour  $d \in \mathcal{D}$ . On définit le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{n}$  de  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  comme la somme directe des  $\tau_d \mathfrak{m}$  pour  $d \neq 1$  et l'on montre qu'il est stable sous l'action de l'algèbre  $H$ , engendrée par  $\{\tau_s, \tau_t, s \in S_0, t \in T\}$ .

**a/** Comme dans la preuve du lemme 3.23, un sous-espace  $\tau_d \mathfrak{m}$  avec  $d \in \mathcal{D}$  est stabilisé par l'action de  $\tau_t, t \in T$ . On en déduit que  $\mathfrak{n}$  est stable sous l'action de  $\tau_t$  pour tout  $t \in T$ .

b/ Soit  $s \in S_0$ . Vérifions que  $\tau_s$  stabilise l'espace  $\mathfrak{n}$ . Soit  $d \in \mathcal{D}$ ,  $d \neq 1$ . Si  $\ell(sd) = \ell(d) - 1$  alors  $\tau_d = \tau_s \tau_{sd}$  et  $sd$  appartient à  $\mathcal{D}$  d'après le lemme 5.3. D'après la remarque 1.21, la combinaison linéaire :

$$a = - \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{T}}, \chi^s = \chi} \varepsilon_\chi$$

d'éléments de  $\{\tau_t, t \in \mathbb{T}\}$  vérifie  $\tau_s \tau_d = \tau_s a \tau_{sd}$  de sorte que  $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_s a \tau_{sd} \mathfrak{m} \subseteq \tau_s \tau_{sd} \mathfrak{m} = \tau_d \mathfrak{m}$  d'après a/. Si  $\ell(sd) = \ell(d) + 1$  alors  $\tau_s \tau_d = \tau_{sd}$ . Si l'élément  $sd$  appartient à  $\mathcal{D}$ , alors  $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_{sd} \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ . Sinon,  $sd \in dW$  d'après le lemme 5.3 donc il existe  $w \in W$  tel que  $\tau_{sd} = \tau_d \tau_w$  de sorte que  $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_d \tau_w \mathfrak{m} \subseteq \tau_d \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ .

Ainsi,  $\mathfrak{n}$  est bien stable sous l'action de  $H$ .  $\square$

**Remarque 5.16.** — Avec les notations de la remarque 5.14, on remarque que le sous- $\langle H, \mathcal{Z} \rangle$ -module de  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  engendré par  $\mathfrak{m}$  est isomorphe au produit tensoriel  $\langle H, \mathcal{Z} \rangle \otimes_H \mathfrak{m}$ . De plus, c'est un facteur direct de la restriction à  $\langle H, \mathcal{Z} \rangle$  de  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$ . En effet, les arguments de la preuve précédente nous assurent qu'un supplémentaire de ce sous-module est donné par la somme directe des  $\tau_d \mathfrak{m}$  pour  $d \in \mathcal{D}$  et  $d \notin z^{\mathbb{Z}}$  (notons que pour  $s \in S_0$  et  $d \in \mathcal{D}$  tels que  $sd \in \mathcal{D}$ , l'élément  $sd$  n'est pas une puissance de  $z$ ).

**Lemme 5.17.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $H$ -module à gauche de type fini. alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathfrak{m}$  est plat.
- (2)  $\mathfrak{m}$  est projectif.
- (3)  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  est plat.
- (4)  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  est projectif.

*Démonstration.* — De façon générale, (1) implique (3) et (2) implique (4) car la platitude et la projectivité sont préservées par extension des scalaires, et (4) implique (3). On sait aussi que (2) équivaut à (1) d'après le corollaire 3.25. Il suffit donc de prouver que (3) implique (1).

Soient  $A$  un idéal à droite de  $H$  et  $\mathcal{A}$  l'idéal à droite de  $\mathcal{H}$  qu'il engendre, qui est isomorphe à  $A \otimes_H \mathcal{H}$  par la proposition 5.12. Sous l'hypothèse que  $\mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  est un  $\mathcal{H}$ -module à gauche plat, l'application linéaire naturelle :

$$\mathcal{A} \otimes_H \mathfrak{m} \simeq A \otimes_H \mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m} \rightarrow \mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$$

est injective. D'après le lemme 5.15, l'espace  $A \otimes_H \mathfrak{m}$  s'injecte dans  $A \otimes_H \mathcal{H} \otimes_H \mathfrak{m}$  et la restriction de l'application précédente à cet espace n'est autre que l'application linéaire naturelle  $A \otimes_H \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ , qui est donc également injective. D'après la proposition 1.a de [5, I.2.3], cela suffit à assurer la platitude de  $\mathfrak{m}$ .  $\square$

**Remarque 5.18.** — (1) Par la remarque 5.4, la proposition 5.12 et les lemmes 5.15 et 5.17 sont valables en remplaçant  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H}'$  et  $H$  par  $H'$ .

(2) Par les remarques 5.14 et 5.16, ils sont encore valables pour  $\mathcal{H}$  et  $\langle H, \mathcal{Z} \rangle$ , puis pour  $\mathcal{H}'$  et  $\langle H', \mathcal{Z} \rangle$ . En tensorisant alors par le caractère  $\mathbf{1}_{\mathcal{Z}}$  de  $\mathcal{Z}$ , il apparaît qu'ils perdurent également si l'on remplace  $\mathcal{H}$  par l'algèbre  $\underline{\mathcal{H}}$  définie au paragraphe 5.1.3. Par le procédé usuel, ils sont alors également valables pour  $\underline{\mathcal{H}'}$ .

### 5.3.3.

**Proposition 5.19.** — *L'application naturelle de  $\mathcal{H} \otimes_H C$  dans  $\mathcal{C}^{K_1}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules à gauche et de représentations de  $K$ . En particulier, la  $K$ -représentation  $\mathcal{C}^{K_1}$  est la somme directe des  $\tau_d C$ ,  $d \in \mathcal{D}$ .*



*Démonstration.* — L'injectivité est une conséquence de la proposition 5.12 par les arguments suivants. L'espace  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C}$  se décompose comme représentation de  $K$  en la somme directe des  $\tau_d \otimes \mathbb{C}$  pour  $d \in \mathcal{D}$ . Les espaces images des  $\tau_d \otimes \mathbb{C}$  dans  $\mathcal{C}^{K_1}$  sont en somme directe puisque  $\tau_d \mathbb{C}$  est un ensemble de fonctions à support dans  $I_1 d K$ . Il suffit donc de vérifier que  $\tau_d \otimes \mathbb{C} \rightarrow \tau_d \mathbb{C}$  est injective. Pour cela, on remarque que chaque application  $K$ -équivariante  $\tau_d : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est injective puisque sa restriction à l'espace  $I_1$ -invariant  $\mathbb{H}$  l'est.

En vertu de la proposition 5.10, et puisque  $K$  normalise  $K_1$ , la surjectivité sera prouvée lorsque l'on aura vérifié que si la fonction  $f = \mathbf{1}_{I_1 d}$  avec  $d \in \mathcal{D}$  est  $K_1$ -invariante, alors elle appartient à l'image de  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}^{K_1}$ .

L'hypothèse de  $K_1$ -invariance se traduit par  $I_1 d K_1 = I_1 d$ . Ainsi, par la décomposition d'Iwahori,  $I_1 d I_1 = I_1 d (I_1 \cap \tilde{U})$ . D'après la remarque 5.2, on a donc  $I_1 d I_1 = I_1 d$  de sorte que  $f$  est égale à la fonction caractéristique de  $I_1 d I_1$  : on a prouvé que  $f = \tau_d \mathbf{1}_{I_1} \in \tau_d \mathbb{C}$ .  $\square$

**Lemme 5.20.** — *Le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{I_1}$  est un facteur direct de  $\mathcal{C}^{K_1}$ .*

*Démonstration.* — Le corollaire 1.14 dit que le  $\mathbb{H}$ -module  $\mathbb{C}^U$  est un facteur direct de  $\mathbb{C}$ . On conclut en notant que dans l'isomorphisme  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C} \simeq \mathcal{C}^{K_1}$  le sous-espace  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C}^U$  de  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C}$  s'identifie à  $\mathcal{C}^{I_1}$ .  $\square$

Les lemmes 5.15 et 5.17 appliqués à  $\mathfrak{m} = \mathbb{C}$  donnent les résultats suivants.

**Proposition 5.21.** — *Le  $\mathbb{H}$ -module  $\mathbb{C}$  est un facteur direct de la restriction de  $\mathcal{C}^{K_1}$  à  $\mathbb{H}$ . En outre, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Le  $\mathbb{H}$ -module  $\mathbb{C}$  est plat.*
- (2) *Le  $\mathbb{H}$ -module  $\mathbb{C}$  est projectif.*
- (3) *Le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_1}$  est plat.*
- (4) *Le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_1}$  est projectif.*

**Exemple 5.22.** — Par la remarque 5.4, le travail précédent est valable en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H}'$ ,  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{C}'$  et  $\mathbb{H}$  par  $\mathbb{H}'$  avec les notations du paragraphe 1.4. De cette remarque, des propositions 2.1, 2.2 et des corollaires 4.14, 4.15, on déduit les assertions suivantes.

- (1) Si  $n = 1$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_1}$  est projectif.
- (2) Si  $n = 2$ , le  $\mathcal{H}'$ -module  $\mathcal{C}'^{K_1}$  est projectif.
- (3) Si  $n = 2$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_1}$  est projectif si et seulement si  $q = p$ .
- (4) Si  $n = 3$ , le  $\mathcal{H}'$ -module  $\mathcal{C}'^{K_1}$  est projectif si et seulement si  $q = p$ .
- (5) Si  $n = 3$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_1}$  est projectif si et seulement si  $q = 2$ .
- (6) Si  $n \geq 4$  et  $q \neq 2$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_1}$  n'est pas plat.
- (7) Si  $n \geq 4$  et  $q \neq p$ , le  $\mathcal{H}'$ -module  $\mathcal{C}'^{K_1}$  n'est pas plat.

**5.3.4.** — On reprend les notations du paragraphe 3.4. En particulier  $P$  est un sous-groupe parabolique supérieur de  $G$  de décomposition de Levi  $P = MN$ . On désigne par  $\mathcal{N}$  le sous-groupe de  $K$  image réciproque de  $N$  par la réduction modulo  $\mathfrak{p}$ , par  $\mathcal{M}$  celle de  $M$ , et par  $\mathcal{P}$  celle de  $P$ . Ce sont des sous-groupes ouverts et compacts de  $\tilde{G}$ .

**Proposition 5.23.** — *L'isomorphisme  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C} \simeq \mathcal{C}^{K_1}$  de la proposition 5.19 induit par restriction un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules à gauche et de représentations de  $\mathcal{P}$  :*

$$\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \simeq \mathcal{C}^{\mathcal{N}}.$$

*En particulier, le  $\mathbb{H}$ -module  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  s'identifie à un facteur direct de  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 5.19, La  $K$ -représentation  $\mathcal{C}^{K_1}$  s'identifie à la somme directe des  $\tau_d \mathcal{C}$ ,  $d \in \mathcal{D}$ . L'application  $\tau_d : \mathcal{C} \rightarrow \tau_d \mathcal{C}$  est injective comme nous l'avons noté dans la preuve de la proposition 5.19, de sorte que l'espace des  $\mathcal{N}$ -invariants de  $\tau_d \mathcal{C}$  est égal à  $\tau_d \mathcal{C}^{\mathcal{N}}$ . Ainsi, on a bien l'isomorphisme annoncé. La dernière assertion provient du lemme 5.15.  $\square$

Compte tenu de la proposition 3.26 et du lemme 5.17, on déduit de ce qui précède le résultat suivant.

**Corollaire 5.24.** — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathcal{C}_M$  est un  $H_M$ -module plat.
- (2)  $\mathcal{C}_M$  est un  $H_M$ -module projectif.
- (3)  $\mathcal{C}_M$  est un  $H_M$ -module injectif.
- (4)  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  est un  $\mathcal{H}$ -module plat.
- (5)  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  est un  $\mathcal{H}$ -module projectif.

Si ces conditions sont vérifiées,  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  est un facteur direct de  $\mathcal{C}^{K_1}$ .

**Remarque 5.25.** — Le lemme 1.14 assure que  $\mathcal{C}^U$  est un facteur direct de  $\mathcal{C}^N$  comme  $H$ -module. On déduit de la proposition 5.23 que  $\mathcal{C}^{U_1}$  est un facteur direct de  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  comme  $\mathcal{H}$ -module.

**Exemple 5.26.** — Nous ferons usage de l'exemple suivant dans la section 7. On choisit  $n = 3$ . Soit  $M$  le sous-groupe de Lévi standard de  $GL_3(k)$  isomorphe à  $GL_2(k) \times GL_1(k)$ . On note  $P$  le sous-groupe parabolique supérieur de  $GL_3(k)$  associé et  $N$  son radical unipotent. On a :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = 1 + \begin{pmatrix} \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

Si  $q = p$ , on déduit de ce qui précède et de la proposition 2.2 que  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  est un  $\mathcal{H}$ -module projectif facteur direct de  $\mathcal{C}^{K_1}$ . Si  $q \neq p$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$  n'est pas plat.

**Remarque 5.27.** — La proposition 5.23 et le corollaire 5.24 sont valables en remplaçant  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H}'$ ,  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{C}'$  et  $H$  par  $H'$  avec les notations du paragraphe 1.4 et par la remarque 5.4. On déduit alors de la proposition 2.1 que pour  $n = 3$ , alors  $\mathcal{C}'^{\mathcal{N}}$  est un  $\mathcal{H}'$ -module projectif facteur direct de  $\mathcal{C}'^{K_1}$  que  $q$  soit égal à  $p$  ou non.

**5.3.5.** Nous faisons ici suite à la remarque 5.18 pour passer du cas de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{C}$  aux résultats relatifs à la représentation  $\underline{\mathcal{C}}$  et son algèbre de Hecke  $\underline{\mathcal{H}}$  (respectivement  $\underline{\mathcal{C}'}$  et  $\underline{\mathcal{H}'}$ ) définis au paragraphe 5.1.3. En utilisant (5.8), les résultats précédents, et en particulier les propositions 5.19 et 5.23 dont nous reprenons les notations, donnent la proposition suivante.

**Proposition 5.28.** — (1) *L'application naturelle de  $\underline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{H}} \mathcal{C}$  dans  $\underline{\mathcal{C}}^{K_1}$  est un isomorphisme de  $\underline{\mathcal{H}}$ -modules à gauche et de représentations de  $K$ . Elle induit par restriction l'isomorphisme  $\underline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{H}} \mathcal{C}^{\mathcal{N}} \simeq \underline{\mathcal{C}}^{\mathcal{N}}$  de  $\underline{\mathcal{H}}$ -modules à gauche et de représentations de  $\mathcal{P}$ .*

(2) *On considère  $\mathcal{C}'$  comme une représentation de  $K\tilde{Z}$  avec action triviale de  $\tilde{Z}$ . Les isomorphismes précédents induisent les isomorphismes de  $\underline{\mathcal{H}'}$ -modules à gauche et de représentations de  $K\tilde{Z}$  (respectivement  $\mathcal{P}\tilde{Z}$ ) suivants :*

$$\underline{\mathcal{H}'} \otimes_{\mathbb{H}'} \mathcal{C}' \simeq \underline{\mathcal{C}'}^{K_1}, \quad \underline{\mathcal{H}'} \otimes_{\mathbb{H}'} \mathcal{C}'^{\mathcal{N}} \simeq \underline{\mathcal{C}'}^{\mathcal{N}}.$$

(3) *Le  $\underline{\mathcal{H}}$ -module  $\underline{\mathcal{H}}$  est un facteur direct de  $\underline{\mathcal{C}}^{K_1}$  et de  $\underline{\mathcal{C}}^{\mathcal{N}}$  ; le  $\underline{\mathcal{H}'}$ -module  $\underline{\mathcal{H}'}$  est un facteur direct de  $\underline{\mathcal{C}'}^{K_1}$  et de  $\underline{\mathcal{C}'}^{\mathcal{N}}$ .*

Explicitons l'exemple dont nous ferons usage au paragraphe 7.3. On suppose que  $n = 3$  et l'on reprend les notations de l'exemple 5.26.

**Exemple 5.29.** — Le  $\mathcal{H}'$ -module  $\underline{\mathcal{C}}^{\mathcal{N}}$  est projectif. Si de plus  $q = p$ , alors  $\underline{\mathcal{C}}^{\mathcal{K}_1}$  est un  $\mathcal{H}'$ -module projectif. Le  $\mathcal{H}$ -module  $\underline{\mathcal{C}}^{\mathcal{K}_1}$  n'est plat que si  $q = p = 2$  auquel cas il est projectif.

## 6. Le cas de $GL_2(\mathbb{F})$

### 6.1. Filtration de $\mathcal{C}$

**6.1.1.** En tant que  $\mathcal{H}$ -module et en tant que représentation de  $K$ , l'espace  $\mathcal{C}$  est la limite inductive des  $\mathcal{C}^{\mathcal{K}_m}$  pour  $m \geq 1$ .

**Proposition 6.1.** — L'espace des vecteurs  $K_m$ -invariants de  $\mathcal{C}$ , pour  $m \geq 1$ , est engendré en tant que  $H$ -module par les  $x \cdot \mathbf{1}_{I_1}$ , avec  $x \in G$  vérifiant  $x^{-1}K_mx \subseteq I_1$ , c'est-à-dire par les  $\mathbf{1}_{I_1x}$ , avec  $x \in G$  vérifiant  $I_1xK_m = I_1x$ .

*Démonstration.* — De façon analogue au cas où  $m = 1$  traité par la proposition 5.10, on va chercher, pour tout  $g \in \tilde{G}$ , un élément  $x \in \tilde{G}$  tel que  $x^{-1}I_1x$  fixe  $f = \mathbf{1}_{I_1gK_m}$  et contienne  $K_m$ . En appliquant la décomposition de Bruhat et puisque  $K$  normalise  $K_m$ , on peut se ramener au cas où  $g$  est une matrice diagonale de la forme

$$g = \text{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_2}) = \begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbf{Z},$$

et l'on va chercher  $x$  sous la forme diagonale  $\text{diag}(\varpi^{b_1}, \varpi^{b_2})$ , avec  $b_1, b_2 \in \mathbf{Z}$ . La condition pour que  $x^{-1}I_1x$  contienne  $K_m$  s'écrit :

$$(6.1) \quad 1 - m \leq b_2 - b_1 \leq m,$$

et la condition pour que  $x^{-1}I_1x$  soit contenu dans  $g^{-1}I_1gK_m$  s'écrit :

$$(6.2) \quad \min\{m, a_2 - a_1\} \leq b_2 - b_1 \leq \max\{1 - m, a_2 - a_1\}.$$

Si  $\mathbf{1}_{I_1g}$  est invariant par  $K_m$ , c'est-à-dire si  $g^{-1}I_1g$  contient  $K_m$ , on a :

$$1 - m \leq a_2 - a_1 \leq m$$

et il suffit de choisir  $x = g$ . Sinon, les conditions (6.1) et (6.2) imposent le choix :

$$b_2 - b_1 = \begin{cases} m & \text{si } a_2 - a_1 \geq m + 1, \\ 1 - m & \text{si } a_2 - a_1 \leq -m. \end{cases}$$

Dans tous les cas, il y a un seul choix possible pour  $x$  à un scalaire près.  $\square$

**6.1.2.** — Dans le cas de  $GL_2(\mathbb{F})$ , l'immeuble  $X$  a une structure d'arbre. On choisit l'étiquetage des sommets de sorte que l'étiquette de  $\sigma_0$  est 0. On appelle *arête* plutôt que *chambre* les facettes de dimension 1. Rappelons que deux arêtes quelconques de l'arbre sont conjuguées sous l'action d'un élément de  $\tilde{G}$ . Pour  $m \in \mathbf{N}$ ,  $m \geq 1$ , on dira d'une arête qu'elle est à distance  $m$  si l'un des deux sommets qui la constituent est à distance  $m$  et l'autre à distance  $m - 1$  (sous-entendu de l'origine  $\sigma_0$ ).

La décomposition de Cartan pour  $\tilde{G}$  s'écrit :

$$\tilde{G} = K \begin{pmatrix} \varpi^{\mathbf{N}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K\tilde{Z}.$$

Pour  $m \in \mathbf{Z}$ , on note  $\lambda_m$  la matrice diagonale  $\text{diag}(\varpi^m, 1)$ , et l'on fixe un système de représentants  $\mathcal{K}_m$  de  $K/K \cap \lambda_m K \lambda_m^{-1}$ . Alors l'ensemble des  $k\lambda_m$ , avec  $m \geq 0$  et  $k \in \mathcal{K}_m$ , est un système de représentants de  $\tilde{G}/K\tilde{Z}$ . Pour  $m \geq 0$ , les sommets à distance  $m$  de l'arbre  $X$  sont les  $k\lambda_m\sigma_0$  pour  $k \in \mathcal{K}_m$ .

Pour tout sommet  $\sigma$  à distance  $m \geq 1$ , on désigne par  $e(\sigma)$  l'unique arête à distance  $m$  contenant le sommet  $\sigma$ . Elle relie  $\sigma$  à l'unique voisin de  $\sigma$  à distance  $m - 1$ . On pose  $e(\sigma_0) := \{\sigma_0, \lambda_{-1}\sigma_0\}$ .

**Remarque 6.2.** — (1) Le fixateur de l'arête  $e(\sigma_0)$  est le sous-groupe d'Iwahori  $I$ . Le pro- $p$ -groupe  $U_{e(\sigma_0)}$  associé à l'arête  $e(\sigma_0)$  est le pro- $p$ -sous-groupe d'Iwahori  $I_1$ .

(2) Soit  $g \in \tilde{G}$  et  $m \geq 1$ . Remarquons que le sommet  $g\sigma_0$  est à distance  $\leq m$  si et seulement si  $K_m \subset gKg^{-1}$  ou encore si et seulement si  $K_{m+1} \subseteq gK_1g^{-1}$ ; l'arête  $ge(\sigma_0)$  est à distance  $\leq m$  si et seulement si c'est le cas de chacun de ses sommets et l'on vérifie que cela signifie que  $K_m \subseteq gI_1g^{-1}$ , en remarquant que  $K \cap \lambda_{-1}K\lambda_1 = I$ .

Un calcul explicite donne le lemme suivant.

**Lemme 6.3.** — Pour tout  $m \geq 1$ , on a  $\lambda_m \mathcal{C}^{K_1} \subseteq \mathcal{C}^{K_{m+1}}$  et  $\lambda_m \mathcal{C}^{I_1} = (\lambda_m \mathcal{C}^{K_1}) \cap \mathcal{C}^{K_m}$ .

**Proposition 6.4.** — Pour  $m \geq 0$ , on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{C}^{K_{m+1}} = \sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance } m}} \mathcal{C}^{U_\sigma}.$$

*Démonstration.* — L'inclusion indirecte est assurée par le lemme 6.3 car  $K_{m+1}$  est distingué dans  $K$ . Montrons l'inclusion directe par récurrence sur  $m$ . Elle est immédiate pour  $m = 0$  puisque  $U_{\sigma_0} = K_1$ . Supposons-la vraie à un certain rang  $m \geq 0$  et montrons-la au rang suivant. Puisque les espaces en présence sont stables sous l'action de  $\mathcal{H}$ , il suffit, d'après la proposition 6.1, de montrer que toute fonction  $K_{m+1}$ -invariante de la forme  $f = \mathbf{1}_{I_1g}$ , avec  $g \in \tilde{G}$ , appartient à l'espace de droite. Dire que  $f$  est  $K_{m+1}$ -invariante signifie que  $K_{m+1}$  est inclus dans  $g^{-1}I_1g$ . Si cette fonction est même  $K_m$ -invariante, alors on conclut par récurrence. Sinon, cela signifie que  $K_m$  n'est pas inclus dans  $g^{-1}I_1g$  et, d'après la remarque 6.2, que l'arête  $g^{-1}e(\sigma_0)$  est à distance exactement  $m + 1$ . L'un des deux sommets  $g^{-1}\sigma_0$  ou  $g^{-1}\lambda_{-1}\sigma_0$  est donc à distance  $m + 1$  et l'on note  $\sigma$  le sommet en question. Dans chacun des deux cas, on vérifie que  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^{U_\sigma}$   $\square$

**Lemme 6.5.** — Pour tout sommet  $\sigma$  à distance  $m \geq 1$ , on a une injection  $\mathcal{H}$ -équivariante

$$(6.3) \quad \mathcal{C}^{U_\sigma} / \mathcal{C}^{U_{e_\sigma}} \hookrightarrow \mathcal{C}^{K_{m+1}} / \mathcal{C}^{K_m}.$$

*Démonstration.* — Le sommet  $\sigma$  est de la forme  $k\lambda_m\sigma_0$  avec  $k \in K$  et l'on vérifie que  $e_\sigma$  est alors l'image par translation par  $k\lambda_m$  de l'arête  $e_{\sigma_0}$ . Ainsi,  $U_\sigma = k\lambda_m K_1 (k\lambda_m)^{-1}$  et  $U_{e_\sigma} = k\lambda_m I_1 (k\lambda_m)^{-1}$ . Puisque les sous-groupes de congruence  $K_m$  et  $K_{m+1}$  sont normalisés par  $k$ , on se ramène au cas de  $k = 1$  qui est prouvé par le lemme 6.3.  $\square$

D'après la proposition 6.4, le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_{m+1}} / \mathcal{C}^{K_m}$  est égal à la somme des images des applications (6.3) lorsque  $\sigma$  parcourt l'ensemble des sommets à distance  $m$ . On a un morphisme  $\mathcal{H}$ -équivariant surjectif

$$(6.4) \quad \bigoplus_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance } m}} \mathcal{C}^{U_\sigma} / \mathcal{C}^{U_{e_\sigma}} \longrightarrow \mathcal{C}^{K_{m+1}} / \mathcal{C}^{K_m}.$$

### 6.1.3.

**Proposition 6.6.** — Le complexe

$$(6.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_1(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

défini au paragraphe 5.1.2 est exact si et seulement si l'application (6.4) est injective pour tout  $m \geq 1$ .

*Démonstration.* — Supposons que l'application (6.4) est injective pour tout  $m \geq 1$ .

Soit  $f \in \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  : c'est une fonction de support  $\text{supp}(f)$  fini sur l'ensemble  $X_0$  des sommets de l'arbre et de valeurs  $f(\sigma) \in \mathcal{C}^{U_\sigma}$  pour tout  $\sigma \in \text{supp}(f)$ . Soit  $m \geq 0$  le rayon minimal tel que le support de  $f$  est contenu dans la boule de rayon  $m$ .

On suppose que  $f$  appartient au noyau de  $\alpha$  c'est à dire que  $\sum_{\sigma \in X_0} f(\sigma) = 0$  et l'on montre par récurrence sur  $m$  que  $f$  est dans l'image de  $\partial_1$ . Remarquons que  $m$  ne saurait être égal à 0 puisque la restriction de  $\alpha$  aux fonctions de support le sommet origine  $\sigma_0$  n'est autre que l'inclusion  $\mathcal{C}^{K_1} \subset \mathcal{C}$ .

Supposons que  $m = 1$ . Alors

$$\sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance 1}}} f(\sigma) = -f(\sigma_0) \in \mathcal{C}^{K_1}$$

donc  $f(\sigma) \in \mathcal{C}^{U_{e_\sigma}}$  pour tout sommet  $\sigma$  à distance 1 par injectivité de (6.4). On définit alors  $\varphi \in \mathcal{F}_1(X, \mathcal{C})$  de support l'ensemble des arêtes à distance 1 de la façon suivante : pour tout sommet  $\sigma$  à distance 1, la fonction  $\varphi$  prend en  $\{\sigma_0, \sigma\}$  la valeur  $f(\sigma)$ . Suivant la définition de l'application de transition  $\partial_1$ , on vérifie que  $\partial_1(\varphi) \in \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  est la fonction de support contenu dans la boule de rayon 1 donnée par :

$$\partial_1(\varphi)(\sigma_0) = - \sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance 1}}} f(\sigma) = f(\sigma_0)$$

et  $\partial_1(\varphi)(\sigma) = f(\sigma)$  pour tout sommet  $\sigma$  à distance 1. Autrement dit,  $\partial_1(\varphi) = f$ .

Supposons que  $m \geq 2$  et que la propriété est vraie aux rangs  $\leq m - 1$ . D'après le lemme 6.3, on a l'inclusion  $\mathcal{C}^{U_\sigma} \subset \mathcal{C}^{K_m}$  pour tout sommet  $\sigma$  à distance  $\leq m - 1$ . Par conséquent, on a

$$\sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance } m}} f(\sigma) \in \mathcal{C}^{K_m}.$$

Par injectivité de (6.4), on en déduit que  $f(\sigma) \in \mathcal{C}^{U_{e_\sigma}}$  pour tout sommet  $\sigma$  à distance  $m$ . On peut alors définir la fonction  $\varphi \in \mathcal{F}_1(X, \mathcal{C})$  de support l'ensemble des arêtes à distance  $m$  de la façon suivante : pour tout sommet  $\sigma$  à distance  $m$ , la fonction  $\varphi$  prend en  $e_\sigma$  la valeur  $f(\sigma)$ . On vérifie que  $\partial_1(\varphi) \in \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  est une fonction de support contenu dans la boule de rayon  $m$  telle que, pour tout sommet  $\sigma$  à distance  $m$ ,

$$\partial_1(\varphi)(\sigma) = -(-1)^m f(\sigma).$$

La fonction  $f + (-1)^m \partial_1(\varphi)$ , de support inclus dans la boule de rayon  $m - 1$ , appartient au noyau de  $\alpha$ . Par hypothèse de récurrence,  $f$  appartient à l'image de  $\partial_1$ .

Supposons que le complexe (6.5) est exact. Soit  $m \geq 1$ . Montrons que (6.4) est injective. Soit  $(v_\sigma)_\sigma$  une famille non nulle d'éléments de  $\mathcal{C}$  indexée par les sommets à distance  $m$  avec  $v_\sigma \in \mathcal{C}^{U_\sigma}$ . Supposons que

$$\sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance } m}} v_\sigma \in \mathcal{C}^{K_m}.$$

Par la proposition 6.4, il existe une famille  $(v_\sigma)_\sigma$  d'éléments de  $\mathcal{C}$  indexée par les sommets  $\sigma$  à distance  $\leq m - 1$  avec  $v_\sigma \in \mathcal{C}^{U_\sigma}$  et

$$(6.6) \quad \sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance } m}} v_\sigma + \sum_{\substack{\sigma \in X_0 \\ \text{à distance } \leq m-1}} v_\sigma = 0.$$

On définit la fonction  $v \in \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  à support dans la boule de rayon  $m$  en posant  $v(\sigma) := v_\sigma$  pour tout sommet à distance  $\leq m$ . Par (6.6), la fonction  $v$  appartient au noyau de  $\alpha$  et par exactitude de (6.5), à l'image de  $\partial_1$  : il existe une fonction  $\psi \in \mathcal{F}_1(X, \mathcal{C})$  telle que  $\partial_1(\psi) = v$ . Soit  $r \geq 1$  le rayon minimal tel que le support de  $\varpi$  est contenu dans la boule de rayon  $r$  et soit  $\tau$  une arête à distance  $r$  dans ce support. L'arête  $\tau$  possède un unique sommet à distance  $r$  et il n'y a pas d'autre arête dans le support de  $\psi$  le contenant. On en déduit que  $\partial_1(\psi)$  prend une valeur non nulle en ce sommet, puis que  $r = m$ . La valeur de  $\partial_1(\psi)$  en chaque sommet  $\sigma$  à distance  $m$  est égale à  $-(-1)^m \psi(e_\sigma) \in \mathcal{C}^{U_{e_\sigma}}$ . Mais elle est aussi égale à  $v_\sigma$ . D'où  $v_\sigma \in \mathcal{C}^{U_{e_\sigma}}$ .  $\square$

Comme rappelé au paragraphe 5.1.2, le complexe (6.5) est exact (voir [34]). On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 6.7.** — *Pour tout  $m \geq 1$ , l'application (6.4) est un isomorphisme.*

## 6.2. Platitude de $\mathcal{C}$

Nous allons montrer la proposition 6.8 suivante. Notons que les arguments utilisés ici sont latents dans [29], où un résultat similaire est prouvé pour le module  $\underline{\mathcal{C}}$  sur l'algèbre de Hecke  $\underline{\mathcal{H}}$ . Remarquons d'ailleurs que pour ce dernier module universel, l'analogie du crucial corollaire 6.7 est démontré directement dans [29] sans utiliser [34]. Cette preuve directe est adaptable au cas du module universel  $\mathcal{C}$ . Nous ne donnons pas les détails ici.

**Proposition 6.8.** — (1) *Le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}$  est plat si et seulement si le  $H$ -module fini  $C$  est plat, autrement dit si et seulement si  $q = p$ . Dans ce cas, ce sont même des modules projectifs.*  
 (2) *Le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}'$  est projectif.*

Le critère de platitude suivant est tiré de la proposition 5 de [5, I.2.5].

**Lemme 6.9.** — *Soit :*

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

*une suite exacte de  $\mathcal{H}$ -modules à gauche. On suppose que  $E''$  est plat. Alors  $E$  est plat si et seulement si  $E'$  est plat.*

*Preuve de la proposition 6.8.* — (1) Supposons que  $\mathcal{C}$  est un  $\mathcal{H}$ -module plat. En utilisant le lemme 6.9 et l'exactitude du complexe (6.5), la platitude du  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  est équivalente à celle de  $\mathcal{F}_1(X, \mathcal{C})$ . Ce dernier étant une somme directe de copies de  $\mathcal{H}$ , il est plat, et l'on en déduit que  $\mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  est plat. Puisque  $\mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  est une somme directe de copies de  $\mathcal{C}^{K_1}$ , la proposition 2 [5, chap. I, §2, n°2] dit que  $\mathcal{C}^{K_1}$  est un  $\mathcal{H}$ -module plat, ce qui, par la proposition 5.21 implique que  $C$  est un  $H$ -module plat.

Pour montrer l'implication réciproque, rappelons que  $\mathcal{C}^{I_1}$  est un facteur direct de  $\mathcal{C}^{K_1}$  (lemme 5.20). Supposons que  $C$  est un  $H$ -module plat, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}^{K_1}$  est un  $\mathcal{H}$ -module plat par la proposition 5.21, et même projectif par la remarque qui la suit. Alors, pour tout  $m \geq 1$  et tout sommet à distance  $m$ , le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{U_\sigma}/\mathcal{C}^{U_{e_\sigma}}$  est projectif, puisqu'il est isomorphe à  $\mathcal{C}^{K_1}/\mathcal{C}^{I_1}$  par la preuve du lemme 6.3. Par la proposition 6.7, le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}^{K_{m+1}}/\mathcal{C}^{K_m}$  est projectif pour tout  $m \geq 1$ . Ainsi,  $\mathcal{C}$  est projectif, comme somme directe de modules projectifs.

(2) En appliquant la projection  $\varepsilon_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  qui est un idempotent central de  $\mathcal{H}$ , on obtient un isomorphisme de  $\mathcal{H}'$ -modules analogue à (6.4) en remplaçant  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{C}'$ . Or on sait que  $C'$  est un  $H$ -module projectif. Les arguments du point précédent s'appliquent alors et l'on en déduit que  $\mathcal{C}'$  est un  $\mathcal{H}'$ -module projectif.  $\square$

### 6.3. Remarques sur les présentations des représentations de $GL_2(F)$

**6.3.1.** — On rappelle que le complexe

$$(6.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_1(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}_0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

est un complexe exact de  $\mathcal{H}$ -modules. On note  $\tilde{G}^\circ$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  des éléments de déterminant inversible dans  $\mathcal{O}$ . Le complexe ci-dessus n'est pas  $\tilde{G}$ -équivariant, mais simplement  $\tilde{G}^\circ$  équivariant. Comme dans [34], on le modifie pour en faire un complexe de représentations de  $\mathcal{H}$  et de  $\tilde{G}$  qui lui est isomorphe en tant que complexe de représentations de  $\mathcal{H}$  et de  $\tilde{G}^\circ$ , en considérant les espaces de chaînes orientées comme suit. Une arête orientée est un couple de la forme  $(\sigma, \sigma')$  où  $\{\sigma, \sigma'\}$  est une arête de  $X$ . On note  $X_{(1)}$  leur ensemble. On définit alors  $\mathcal{F}_{(1)}(X, \mathcal{C})$  comme l'ensemble des fonctions  $f$  à support fini dans l'ensemble des arêtes orientées telles que  $f(\sigma, \sigma') = -f(\sigma', \sigma) \in \mathcal{C}^{\cup\{\sigma, \sigma'\}}$  pour toute arête  $\{\sigma, \sigma'\}$ . L'espace  $\mathcal{F}_{(0)}(X, \mathcal{C})$  est identique à  $\mathcal{F}_0(X, \mathcal{C})$  et l'application de transition  $\partial_{(1)} : \mathcal{F}_{(1)}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{F}_{(0)}(X, \mathcal{C})$  associée à la fonction de support  $\{(\sigma, \sigma'), (\sigma', \sigma)\}$  et de valeur  $v$  en  $(\sigma, \sigma')$  la fonction  $\sigma \mapsto -v, \sigma' \mapsto v$ . Le complexe de représentations de  $\tilde{G}$  et de  $\mathcal{H}$

$$(6.7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{(1)}(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_{(1)}} \mathcal{F}_{(0)}(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

est exact.

On se donne un  $\mathcal{H}$ -module à droite  $\mathfrak{M}$ . Désormais dans ce paragraphe, on suppose que  $q = p$  de sorte que  $\mathcal{C}$  est un  $\mathcal{H}$ -module projectif par la proposition 6.8. La suite exacte (6.7) admet donc une section  $\mathcal{H}$ -équivariante et le complexe suivant de représentations de  $\tilde{G}$  est exact

$$(6.8) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{F}_{(1)}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{F}_{(0)}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C} \rightarrow 0.$$

On obtient ainsi une résolution pour toute représentation de  $\tilde{G}$  de la forme  $\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}$ .

**Remarque 6.10.** — Le complexe (6.7) admet une section  $\tilde{G}$ -équivariante naturelle  $\mathcal{S} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}_{(0)}(X, \mathcal{C})$  définie par  $\mathbf{1}_{I_1} \rightarrow f_0$  où  $f_0$  est la fonction de support  $\sigma_0$  et de valeur  $\mathbf{1}_{I_1} \in \mathcal{C}^{K_1}$ .

Vérifions que cette section n'est pas  $\mathcal{H}$ -équivariante. On pose  $\omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$ . Cet élément normalise  $I_1$  et est de longueur nulle dans  $\tilde{W}$ . L'image de  $\mathbf{1}_{I_1}$  par  $\tau_\omega$  est la fonction caractéristique  $\mathbf{1}_{I_1\omega} = \omega^{-1} \cdot \mathbf{1}_{I_1}$  qui est envoyée par  $\mathcal{S}$  sur la fonction de support  $\omega^{-1}\sigma_0$  et de valeur  $\omega^{-1}\mathbf{1}_{I_1}$ . L'image par  $\tau_\omega$  de  $f_0$  est, quant à elle, la fonction de support  $\sigma_0$  et de valeur  $\tau_\omega \in \mathcal{C}^{K_1}$ .

**6.3.2.** Dans ce paragraphe, on suppose de plus que  $F = \mathbb{Q}_p$ . Soit  $\pi$  une représentation de  $\tilde{G}$  ayant un caractère central. D'après [30], elle est isomorphe à la représentation :

$$\pi^{I_1} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}$$

de sorte que (6.8) fournit une résolution pour la représentation  $\pi$ . Dans les termes de Breuil-Paskunas ([32], [9]), la représentation  $\pi$  est l'homologie en degré 0 du diagramme donné par l'injection  $I_1\tilde{Z}$ -équivariante :

$$(6.9) \quad \pi^{I_1} \hookrightarrow \pi^{I_1} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}^{K_1}.$$

Dans le cas où  $\pi$  est admissible, en particulier si  $\pi$  est irréductible ([1], [7]), l'espace vectoriel  $\pi^{I_1} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}^{K_1}$  est de dimension finie puisque  $\mathcal{C}^{K_1}$  est un  $\mathcal{H}$ -module de type fini (proposition 5.10). On obtient ainsi une *présentation standard* pour toute représentation admissible de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  ayant un caractère central. Ce résultat a été démontré pour la première fois par [16]. On en trouve d'autres preuves dans [9], [41], [22], [18].

**Remarque 6.11.** — (1) L'espace  $\pi^{I_1} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}^{K_1}$  est la sous-K-représentation de  $\pi$  engendrée par  $\pi^{I_1}$ . C'est un sous-espace  $K_1$ -invariant. Cet espace ne coïncide pas en général avec l'espace  $\pi^{K_1}$  des  $K_1$ -invariants de  $\pi$ . Par exemple, dans [8, Théorème 8.6], Breuil donne un exemple où  $\pi$  est une représentation supersingulière,  $\pi^{K_1}$  n'est pas une représentation semi-simple de  $K$ , et  $\pi^{I_1} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}^{K_1}$  est son socle.

(2) Comme dans [34, §3], on peut construire le complexe de représentations de  $\tilde{G}$  suivant :

$$(6.10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{(1)}(X, \pi) \xrightarrow{\partial_{(1)}} \mathcal{F}_{(0)}(X, \pi) \xrightarrow{\alpha} \pi \rightarrow 0$$

où  $\pi$  est une représentation lisse de  $\tilde{G}$  à coefficients dans un corps algébriquement clos  $\mathfrak{K}$  de caractéristique quelconque. Les espaces  $\mathcal{F}_{(0)}(X, \pi)$  et  $\mathcal{F}_{(1)}(X, \pi)$ , l'application de transition  $\partial_{(1)}$  et le morphisme d'augmentation sont définis comme au début du paragraphe 6.3.1 en remplaçant  $\mathcal{C}$  par  $\pi$ .

Dans le cas où  $\mathfrak{K}$  est le corps des nombres complexes et  $\pi$  est une représentation de  $\tilde{G}$  engendrée par son espace des vecteurs  $I_1$ -invariants, il est prouvé dans [34] que le complexe (6.10) est exact, donc en particulier,  $\pi$  est isomorphe à l'homologie en degré 0 du diagramme donné par l'injection  $I_1$ -équivariante  $\pi^{I_1} \hookrightarrow \pi^{K_1}$ .

Le point (1) de la présente remarque dit que le complexe (6.10) n'est pas exact en général si  $\mathfrak{K}$  est de caractéristique  $p$ .

## 7. Le cas de $GL_3(F)$

Dans toute cette section, on suppose que  $n = 3$ .

### 7.1. Notations et préliminaires

On reprend les notations de l'exemple 5.26. On note  $\mathcal{P}$  le sous-groupe de  $K$  image réciproque du sous-groupe parabolique standard de  $G$  de facteur de Levi  $M = GL_2(k) \times GL_1(k)$ . C'est un sous-groupe parahorique de  $\tilde{G}$  de pro- $p$ -radical égal au sous-groupe  $\mathcal{N}$  défini dans l'exemple 5.26. On pose

$$\omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varpi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $\omega^3 = \varpi \cdot \text{Id}$  où  $\text{Id}$  est la matrice identité de  $\tilde{G}$ . Distinguons et notons  $\sigma_2$  la chambre standard de l'immeuble  $X$  : les sommets  $\sigma_0$ ,  $\omega\sigma_0$  et  $\omega^2\sigma_0$  forment une chambre dont le stabilisateur sous l'action de  $\tilde{G}$  est le sous-groupe engendré par  $\omega$  et le sous-groupe d'Iwahori  $I$ . On note  $\sigma_1$  l'arête  $\{\sigma_0, \omega\sigma_0\}$ . Elle a pour stabilisateur le sous-groupe de  $\tilde{G}$  engendré par  $\tilde{Z}$  et  $\mathcal{P}$ . Le stabilisateur dans  $\tilde{G}$  du sommet standard  $\sigma_0$  est le le sous-groupe de  $\tilde{G}$  engendré par  $\tilde{Z}$  et  $K$ . Pour tout simplexe  $\sigma$ , on note  $\mathfrak{K}(\sigma)$  son stabilisateur dans  $\tilde{G}$ .

Les facettes  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont telles que les pro- $p$ -sous-groupes de  $\tilde{G}$  associés (voir §5.1.2) sont respectivement  $U_{\sigma_0} = K_1$  et  $U_{\sigma_2} = I_1$  et :

$$U_{\sigma_1} = \mathcal{N} = 1 + \begin{pmatrix} \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

Commençons par un résultat relatif à la structure de l'immeuble de  $GL_3$ . Soient  $m \geq 1$  et  $\sigma$  un simplexe de  $X$ . On dira que  $\sigma$  est à distance  $m$  si  $m$  est le plus petit rayon d'une boule de centre  $\sigma_0$  contenant le simplexe  $\sigma$ .



Soit  $\sigma$  une chambre de  $X$  à distance  $m$ . Elle possède un sommet  $x$  à distance  $m$ , un sommet  $z$  à distance  $m - 1$  et un sommet  $y$  à distance  $m - 1$  ou  $m$ . On dira qu'elle est de type (a) si  $y$  est à distance  $m$ , de type (b) s'il est à distance  $m - 1$ .

**Lemme 7.1.** — *L'ensemble des chambres de  $X$  à distance  $m$  contenant l'arête  $\{x, y\}$  est :*

- réduit à  $\{\sigma\}$  si  $y$  est à distance  $m$ , c'est-à-dire si  $\sigma$  est de type (a) ;
- constitué de  $\sigma$  et de chambres de type (a) si  $y$  est à distance  $m - 1$ , c'est-à-dire si  $\sigma$  est de type (b).

*Démonstration.* — Quitte à conjuguer par un élément de  $\tilde{G}$ , on peut supposer que  $\sigma$  appartient à l'appartement standard. D'après [2, Lemmes 2.3.4 et 2.3.5], tous les voisins de  $x$  à distance  $m - 1$  appartiennent à chacun des appartements contenant à la fois  $\sigma_0$  et  $x$  (ils sont donc dans l'appartement standard) et sont au nombre de 1 ou 2. De plus, si  $x$  a deux voisins à distance  $m - 1$ , il forme avec eux une chambre de l'immeuble.

Soit  $\sigma' = \{x, y, t\}$  une autre chambre à distance  $m$  contenant  $\{x, y\}$ . Supposons que  $y$  est à distance  $m$  et que  $\sigma \neq \sigma'$ . Alors  $t$  est nécessairement à distance  $m - 1$  et est un voisin de  $x$  à distance  $m - 1$  dans l'appartement standard. Si  $x$  a un seul voisin à distance  $m - 1$  alors  $t = z$  et  $\sigma = \sigma'$  ce qui est exclu. Donc  $x$  possède deux voisins à distance  $m - 1$ , ce sont  $t$  et  $z$ . Mais alors  $\{x, t, z\}$  forme une autre chambre de l'appartement standard, ce qui contredit le fait que  $y$  et  $t$  sont voisins.

Supposons que  $y$  est à distance  $m - 1$  et que  $\sigma'$  est, comme  $\sigma$ , de type (b) c'est-à-dire que  $t$  est également à distance  $m - 1$ . Alors  $y, z$  et  $t$  sont des voisins à distance  $m - 1$  de  $x$  ce qui conduit à la seule possible conclusion que  $z = t$  et  $\sigma' = \sigma$ .  $\square$

On rappelle que l'on dispose d'un complexe augmenté de  $\mathcal{H}$ -modules (respectivement  $\mathcal{H}'$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$ -modules) qui est exact :

$$(7.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_2(X, \mathcal{U}) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{F}_1(X, \mathcal{U}) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}_0(X, \mathcal{U}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{U} \rightarrow 0.$$

où  $\mathcal{U}$  désigne respectivement le module universel  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}'$ ,  $\underline{\mathcal{C}}$  et  $\underline{\mathcal{C}'}$ . Nous allons noter  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  l'algèbre de Hecke correspondant au module universel  $\mathcal{U}$ .

**Lemme 7.2.** — *Soit  $i \in \{0, 1, 2\}$ .*

- (1) *Le  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module à gauche  $\mathcal{F}_i(X, \mathcal{U})$  est une somme directe de copies de  $\mathcal{U}^{U_{\sigma_i}}$ .*
- (2) *L'inclusion de  $\mathcal{U}^{U_{\sigma_i}}$  dans  $\mathcal{F}_i(X, \mathcal{U})$  induit un isomorphisme :*

$$\text{ind}_{\mathfrak{K}(\sigma_i)}^{\tilde{G}} \mathcal{U}^{U_{\sigma_i}} \rightarrow \mathcal{F}_i(X, \mathcal{U})$$

*de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -modules à gauche et de représentations de  $\tilde{G}$ .*

*Démonstration.* — Dans l'immeuble de  $\tilde{G} = GL_3(F)$ , les facettes de dimension  $i$  sont conjuguées à  $\sigma_i$  sous  $\tilde{G}$ . Par ailleurs, pour  $g \in \tilde{G}$ , on a  $U_{g \cdot \sigma_i} = g U_{\sigma_i} g^{-1}$  et  $\mathcal{U}^{U_{g \cdot \sigma_i}} = g \cdot \mathcal{U}^{U_{\sigma_i}}$ . On en déduit (1).

L'homomorphisme de représentations de  $\tilde{G}$  induit par l'inclusion de  $\mathcal{U}^{U_{\sigma_i}}$  dans  $\mathcal{F}_i(X, \mathcal{U})$  associe à toute fonction  $\phi \in \text{ind}_{\mathfrak{K}(\sigma_i)}^{\tilde{G}} \mathcal{U}^{U_{\sigma_i}}$  la fonction  $f_{\phi} \in \mathcal{F}_i(X, \mathcal{U})$  définie par :

$$f_{\phi}(\sigma) = g^{-1} \cdot \phi(g)$$

où  $g \in \tilde{G}$  est n'importe quel élément vérifiant  $\sigma = g^{-1} \cdot \sigma_i$ . Pour prouver (2), il suffit de vérifier que sa réciproque est donnée par  $f \mapsto \phi_f$ , où  $\phi_f$  est définie par :

$$\phi_f(g) = g \cdot f(g^{-1} \cdot \sigma_i) = (gf)(\sigma_i)$$

pour tout  $g \in \tilde{G}$ .  $\square$

**Proposition 7.3.** — Soit  $f \in \mathcal{F}_2(X, \mathcal{U})$ . On suppose que toute arête dans le support de  $\partial_2(f)$  est à distance  $\leq m$ . Alors les chambres du support de  $f$  sont à distance  $\leq m$ .

*Démonstration.* — Soit  $m' \geq 1$  le plus petit entier tel que le support de  $f$  est inclus dans la boule (fermée de centre  $\sigma_0$ ) de rayon  $m'$ . On suppose que  $m' > m$ . Soit  $\sigma$  une chambre du support de  $f$  à distance  $m'$  : notons  $x$  un sommet de  $\sigma$  à distance  $m'$  et  $z$  un sommet de  $\sigma$  à distance  $m' - 1$ . Le troisième sommet noté  $y$  est à distance  $m'$  ou  $m' - 1$  selon que  $\sigma$  est de type (a) ou (b).

Il est impossible que la chambre  $\sigma$  soit la seule du support de  $f$  contenant l'arête  $\{x, y\}$ . En effet, si c'était le cas, la valeur de  $\partial_2(f)$  en  $\{x, y\}$  serait  $f(\sigma)$  ou  $-f(\sigma)$ , qui est non nulle, ce qui est impossible puisque  $\{x, y\}$  n'est pas dans le support de  $\partial_2(f)$ . D'après le lemme 7.1, la chambre  $\sigma$  ne saurait donc être de type (a). On a prouvé que  $y$  est à distance  $m' - 1$  et qu'il n'y pas de chambre de type (a) à distance  $m'$  dans le support de  $f$ . Une chambre du support de  $f$  contenant  $\{x, y\}$  est donc de type (b) à distance  $m'$  et  $\sigma$  est la seule qui satisfait ces critères par le lemme 7.1. On obtient une contradiction, donc  $m' \leq m$ .  $\square$

**Lemme 7.4.** — Soit  $\mathcal{A}$  un idéal à droite de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ . On a :

$$(7.2) \quad \mathcal{A}\mathrm{Im}(\partial_2) = \mathcal{A}\mathcal{F}_1(X, \mathcal{U}) \cap \mathrm{Im}(\partial_2).$$

*Démonstration.* — L'inclusion du membre de gauche dans celui de droite est immédiate. Il s'agit donc de prouver que l'on a l'inclusion contraire, ce que l'on fait en raisonnant par l'absurde. Soit donc  $f \in \mathcal{F}_2(X, \mathcal{U})$  une fonction non nulle telle que  $\partial_2(f)$  appartient à  $\mathcal{A}\mathcal{F}_1(X, \mathcal{U})$  mais n'appartient pas à  $\mathcal{A}\mathrm{Im}(\partial_2)$ . S'il existe une chambre  $\sigma$  dans le support de  $f$  telle que  $f(\sigma) \in \mathcal{A}\mathcal{U}^{\mathcal{U}_\sigma}$ , on note  $f'$  l'élément de  $\mathcal{F}_2(X, \mathcal{U})$  de support  $\sigma$  et prenant la même valeur que  $f$  en  $\sigma$ . On a donc  $\partial_2(f') \in \mathcal{A}\mathrm{Im}(\partial_2)$  et, quitte à remplacer  $f$  par  $f - f'$ , on peut supposer que :

$$(7.3) \quad f(\sigma) \notin \mathcal{A}\mathcal{U}^{\mathcal{U}_\sigma}$$

pour toute chambre  $\sigma$  du support de  $f$ . Nous allons aboutir à une contradiction en suivant un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition 7.3.

Soit  $m$  le plus petit entier  $\geq 1$  tel que toutes les chambres dans le support de  $f$  soient contenues dans la boule (fermée de centre  $\sigma_0$ ) et de rayon  $m$ . Soit  $\sigma$  une chambre à distance  $m$  dans le support de  $f$  : elle possède un sommet  $x$  à distance  $m$  et ses autres sommets  $y$  et  $z$  sont à distance  $\leq m$ . Au moins l'un des deux, disons  $z$ , est à distance  $m - 1$ . Remarquons qu'il est impossible que la chambre  $\sigma$  soit la seule du support de  $f$  contenant l'arête  $\{x, y\}$ . En effet, si c'était le cas, regardons  $\partial_2(f)$  : c'est une fonction dont la valeur en  $\{x, y\}$  est  $f(\sigma)$  ou  $-f(\sigma)$ , qui est non nulle. Puisque l'on a supposé que  $\partial_2(f) \in \mathcal{A}\mathcal{F}_1(X, \mathcal{U})$ , c'est que cette valeur appartient à  $\mathcal{A}\mathcal{U}^{\mathcal{U}_{\{x,y\}}}$ . On a donc :

$$(7.4) \quad f(\sigma) \in \mathcal{A}\mathcal{U}^{\mathcal{U}_{\{x,y\}}} \cap \mathcal{U}^{\mathcal{U}_\sigma} = \mathcal{A}\mathcal{U}^{\mathcal{U}_\sigma}$$

car  $\mathcal{U}^{\mathcal{U}_{\{x,y\}}}$  est un facteur direct de  $\mathcal{U}^{\mathcal{U}_{\sigma_1}}$  comme  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module d'après la remarque 5.25 et le point (3) de la proposition 5.28, et en notant que  $\tilde{G}$  agit transitivement sur les paires de simplexes  $\tau \subset \sigma$  où  $\tau$  est une arête contenue dans la chambre  $\sigma$ . Ceci est en contradiction avec (7.3), donc la chambre  $\sigma$  n'est pas la seule du support de  $f$  contenant l'arête  $\{x, y\}$ .

D'après le lemme 7.1, la chambre  $\sigma$  est donc de type (b), le sommet  $y$  est à distance  $m - 1$ . Ce raisonnement étant valable pour toutes les chambres du support de  $f$  à distance  $m$ , on sait qu'elles sont toutes de type (b). Mais alors, appliquant à nouveau le lemme 7.1, la chambre  $\sigma$  est l'unique du support de  $f$  contenant  $\{x, y\}$  et l'on aboutit à une contradiction.

On a ainsi prouvé l'égalité (7.2)  $\square$

Notons respectivement  $\mathcal{B}_1(0, m) \subseteq \mathcal{F}_1(X, \mathcal{U})$  et  $\mathcal{B}_2(0, m) \subseteq \mathcal{F}_2(X, \mathcal{U})$  l'ensemble des fonctions de support inclus dans l'ensemble des arêtes à distance  $\leq m$ , respectivement des chambres à distance  $\leq m$ . Ce sont des sous-espaces stables sous l'action de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ .

**Lemme 7.5.** — Soit  $A$  un idéal à droite de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ . On a :

$$(7.5) \quad \partial_2(\mathcal{B}_2(0, m)) \cap A\mathcal{B}_1(0, m) = A\partial_2(\mathcal{B}_2(0, m)).$$

*Démonstration.* — Seule l'inclusion du membre de gauche dans celui de droite mérite une vérification. Soit  $f \in \mathcal{B}_2(0, m)$  telle que  $\partial_2(f) \in A\mathcal{B}_1(0, m) \subseteq A\mathcal{F}_1(X, \mathcal{U})$ . D'après (7.2), on a  $\partial_2(f) \in A\text{Im}(\partial_2)$  ce qui signifie qu'il existe une fonction  $g \in A\mathcal{F}_2(X, \mathcal{U})$  telle que  $\partial_2(f) = \partial_2(g)$ . Mais  $\partial_2$  est injective, donc  $f \in A\mathcal{F}_2(X, \mathcal{U}) \cap \mathcal{B}_2(0, m) = A\mathcal{B}_2(0, m)$ .  $\square$

## 7.2. Filtration de $\text{Im}\partial_1$

Soit  $m \geq 1$ . On rappelle les critères suivants, tirés du corollaire à la proposition 7 de [5, I.2.6].

**Lemme 7.6.** — Soit  $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -modules à gauche.

(1) On suppose que  $E''$  est plat. Alors, pour tout idéal à droite  $A$  de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ , on a :

$$(7.6) \quad AE' = E' \cap AE.$$

(2) On suppose que  $E$  est plat et que, pour tout idéal à droite  $A$  de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ , on a l'égalité (7.6). Alors  $E''$  est plat.

**Proposition 7.7.** — Le  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module à gauche  $\mathcal{B}_1(0, m)$  est plat si et seulement si  $\mathcal{U}^{\cup\sigma_1}$  est un  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module à gauche plat, auquel cas  $\partial_1(\mathcal{B}_1(0, m))$  est également plat.

*Démonstration.* — La première assertion provient du fait que le  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module à gauche  $\mathcal{B}_1(0, m)$  s'identifie à une somme directe (finie) de copies de  $\mathcal{U}^{\cup\sigma_1}$ . Supposons maintenant que  $\mathcal{B}_1(0, m)$  est plat. Le  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module  $\partial_1(\mathcal{B}_1(0, m))$  est isomorphe au quotient de  $\mathcal{B}_1(0, m)$  par l'intersection de  $\mathcal{B}_1(0, m)$  avec l'image de  $\partial_2$  par exactitude du complexe (7.1). D'après la proposition 7.3, cette intersection est égale à  $\partial_2(\mathcal{B}_2(0, m))$ . Les lemmes 7.6(2) et 7.5 assurent alors la platitude du module quotient  $\partial_1(\mathcal{B}_1(0, m))$ .  $\square$

Puisque le  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module  $\text{Im}(\partial_1)$  est la limite inductive des  $\partial_1(\mathcal{B}_1(0, m))$ , on obtient le corollaire suivant en appliquant la proposition 2 (ii) de [5, I.2.3].

**Corollaire 7.8.** — Si  $\mathcal{U}^{\cup\sigma_1}$  est un  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module plat, alors  $\text{Im}(\partial_1)$  est un  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module plat.

## 7.3. Etude de la platitude des modules universels lorsque $q = p$ .

**Proposition 7.9.** — Supposons que  $q = p \neq 2$ .

- (1) Le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{C}$  n'est pas plat.
- (2) Le  $\mathcal{H}$ -module  $\underline{\mathcal{C}}$  n'est pas plat.

*Démonstration.* — Dans cette preuve,  $\mathcal{U}$  est égal à  $\mathcal{C}$  ou  $\underline{\mathcal{C}}$ . On a la suite exacte de  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -modules :

$$(7.7) \quad 0 \rightarrow \text{Im}(\partial_1) \rightarrow \mathcal{F}_0(X, \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow 0.$$

Supposons que  $q = p \neq 2$ . Alors  $\mathcal{U}^{\cup\sigma_1}$  est un  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module plat (voir les exemples 5.26 et 5.29). Le corollaire 7.8 donne donc la platitude de  $\text{Im}(\partial_1)$ . D'après le lemme 6.9, si  $\mathcal{U}$  était un  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module plat, alors  $\mathcal{F}_0(X, \mathcal{U})$  serait également un  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ -module plat. D'après les résultats rassemblés dans l'exemple 5.22 et par le lemme 7.2, ce n'est pas le cas. Donc  $\mathcal{U}$  n'est pas plat.  $\square$

On s'occupe maintenant du cas où  $\mathcal{U} = \underline{\mathcal{C}}'$ .

**Lemme 7.10.** — (1) On a un isomorphisme de  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module à gauche :

$$\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C') \rightarrow \mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}')$$

et  $\operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C')$  est un facteur direct de  $\mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}')$  comme  $\mathbb{H}'$ -module.

(2) On a un isomorphisme de  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module à gauche :

$$\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{ind}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C'^{\mathbb{N}}) \rightarrow \mathcal{F}_1(X, \underline{\mathcal{C}}')$$

et  $\operatorname{ind}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C'^{\mathbb{N}})$  est un facteur direct de  $\mathcal{F}_1(X, \underline{\mathcal{C}}')$  comme  $\mathbb{H}'$ -module.

*Démonstration.* — On prouve (1), le second résultat s'obtenant de façon similaire. D'après le lemme 7.2, on a un isomorphisme de représentations de  $\tilde{\mathbb{G}}$  et de  $\underline{\mathcal{H}}'$ -modules :

$$\mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}') \simeq \operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}\underline{\mathcal{C}}'^{K_1}.$$

D'après la proposition 5.28, on a un isomorphisme de représentations de  $\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}$  et de  $\underline{\mathcal{H}}'$ -modules à gauche :

$$\underline{\mathcal{C}}'^{U_{\sigma_0}} \simeq \underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} C',$$

où  $\tilde{\mathbb{Z}}$  agit trivialement sur le membre de droite. L'application :

$$h \otimes \phi \mapsto (g \mapsto h \otimes \phi(g))$$

définit un isomorphisme de représentations de  $\tilde{\mathbb{G}}$  et de  $\underline{\mathcal{H}}'$ -modules de  $\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C')$  vers l'induite  $\operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} C')$ , ce dont on déduit l'isomorphisme attendu. Par ailleurs, d'après la remarque 5.18,  $C'$  est un facteur direct de  $\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} C'$ .  $\square$

On identifie  $\mathcal{F}_1(X, \underline{\mathcal{C}}')$  à  $\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{ind}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C'^{\mathbb{N}})$  et l'on note  $\partial_1^0$  la restriction de  $\partial_1$  à  $\operatorname{ind}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}C'^{\mathbb{N}}$ . Elle est à valeurs dans  $\operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}C'$ .

**Remarque 7.11.** — Puisque  $\partial_1$  est  $\underline{\mathcal{H}}'$ -équivariante, elle s'identifie à l'application :

$$\operatorname{id}_{\underline{\mathcal{H}}'} \otimes \partial_1^0 : \underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{ind}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}C'^{\mathbb{N}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}C'$$

de sorte que  $\operatorname{Im}(\partial_1)$  est isomorphe à  $\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \operatorname{Im}(\partial_1^0)$  comme  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module à gauche, car  $\underline{\mathcal{H}}'$  est un  $\mathbb{H}'$ -module libre d'après la remarque 5.18.

**Corollaire 7.12.** — Si  $\underline{\mathcal{C}}'^{U_{\sigma_1}}$  est un  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module plat, le  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module  $\operatorname{Im}(\partial_1)$  est un facteur direct de  $\mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}')$ .

*Démonstration.* — Par la remarque 7.11, le corollaire sera prouvé lorsque l'on aura vérifié que le  $\mathbb{H}'$ -module  $\operatorname{Im}(\partial_1^0)$  est un facteur direct de  $\operatorname{ind}_{\mathbb{K}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}(C')$ . Ceci est donné par le lemme suivant.

**Lemme 7.13.** — Si  $\underline{\mathcal{C}}'^{U_{\sigma_1}}$  est un  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module plat, le  $\mathbb{H}'$ -module à gauche  $\operatorname{Im}(\partial_1^0)$  est injectif.

*Démonstration.* — On pose  $\mathcal{B}_1^0(0, m) = \operatorname{ind}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{Z}}}^{\tilde{\mathbb{G}}}C'^{\mathbb{N}} \cap \mathcal{B}_1(0, m)$ . Le  $\mathbb{H}'$ -module à gauche  $\operatorname{Im}(\partial_1^0)$  est la limite inductive des  $\partial_1^0(\mathcal{B}_1^0(0, m))$ . Puisque  $\mathbb{H}'$  est un anneau noetherien, le théorème de Bass-Papp [26, (3.46)] assure que le lemme sera démontré si l'on prouve que chaque  $\mathbb{H}'$ -module  $\partial_1^0(\mathcal{B}_1^0(0, m))$  est injectif. Par auto-injectivité de  $\mathbb{H}'$ , il suffit de prouver que  $\partial_1^0(\mathcal{B}_1^0(0, m))$  est un  $\mathbb{H}'$ -module plat. On remarque alors que  $\underline{\mathcal{H}}' \otimes_{\mathbb{H}'} \partial_1^0(\mathcal{B}_1^0(0, m))$  s'identifie à  $\partial_1(\mathcal{B}_1(0, m))$  qui est un  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module plat d'après la proposition 7.7, sous l'hypothèse que  $\underline{\mathcal{C}}'^{U_{\sigma_1}}$  est un  $\underline{\mathcal{H}}'$ -module plat. On applique pour finir le lemme 5.17 adapté à  $\underline{\mathcal{H}}'$  et  $\mathbb{H}'$  dans la remarque 5.18, et l'on obtient la platitude du  $\mathbb{H}'$ -module à gauche  $\partial_1^0(\mathcal{B}_1^0(0, m))$ .  $\square$

Le corollaire 7.12 est démontré.  $\square$

D'après l'exemple 5.29, le  $\mathcal{H}'$ -module  $\underline{\mathcal{C}}'^{\cup\sigma_1}$  est plat que  $q$  soit égal à  $p$  ou non. On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 7.14.** — *Le  $\mathcal{H}'$ -module à gauche  $\partial_1(\mathcal{F}_1(X, \underline{\mathcal{C}}'))$  est un facteur direct de  $\mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}')$ .*

Le  $\mathcal{H}'$ -module  $\mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}')$  est une somme directe de copies de  $\underline{\mathcal{C}}'^{\cup\sigma_0}$ , qui est un  $\mathcal{H}'$ -module projectif sous l'hypothèse  $q = p$  (voir l'exemple 5.29). D'après la proposition précédente et par exactitude du complexe (7.1), le  $\mathcal{H}'$ -module  $\underline{\mathcal{C}}'$  est un facteur direct de  $\mathcal{F}_0(X, \underline{\mathcal{C}}')$ . On a ainsi prouvé le résultat suivant.

**Théorème 7.15.** — *Supposons que  $q = p$ .*

- (1) *Le  $\mathcal{H}'$ -module à gauche  $\underline{\mathcal{C}}'$  est projectif.*
- (2) *Le  $\mathcal{H}$ -module à gauche  $\underline{\mathcal{C}}$  est plat si et seulement si  $p = 2$ , auquel cas il est même projectif.*

## Références

- [1] L. BARTHEL & R. LIVNÉ – “Irreducible modular representations of  $GL_2$  of a local field”, *Duke Math. Journal* **75**, no. 2, (1994) p. 261–292.
- [2] J. BELLAÏCHE & A. OTWINOWSKA – “Platitude du module universel pour  $GL_3$  en caractéristique non banale”, *Bull. Soc. math. France* **131** (4), 2003, p.507–525.
- [3] D. J. BENSON – *Representations and Cohomology I, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (1991).
- [4] A. BOREL – “Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup”, *Inventiones Math.* **35**, (1976) p.233–259.
- [5] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématiques. Algèbre commutative. Chapitres 1 et 2*. Hermann, Paris (1961).
- [6] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématiques. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris (1970).
- [7] C. BREUIL – “Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  I”, *Compositio Mathematica*. **138**, no. 2 (2003) p.165–188.
- [8] C. BREUIL – “Representations of Galois and of  $GL_2$  in characteristic  $p$ ”, Cours à l’université de Columbia, <http://www.ihes.fr/~breuil/>, (2004)
- [9] C. BREUIL & V. PASKUNAS – “Towards a modulo  $p$  Langlands correspondence for  $GL(2)$ ”. A paraître dans *Memoirs of Amer. Math. Soc.*
- [10] P. BROUSSOUS – “Acyclicity of Schneider and Stuhler’s coefficient systems: another approach in the level 0 case”, *J. Algebra* **279** (2004), p. 737–748.
- [11] K. BROWN – *Buildings*, Springer-Verlag, New York, (1989).
- [12] M. CABANES & M. ENGUEHARD – *Representation theory of finite reductive groups*, Cambridge University Press, (2004).
- [13] R. W. CARTER – *Finite Groups of Lie Type*. Wiley Interscience, (1985).
- [14] R. W. CARTER & G. LUSZTIG – “Modular representations of finite groups of Lie type”, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1976), p. 347–384.
- [15] F. DIAMOND – “A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups.” *L-functions and Galois representations / edited by David Burns, Kevin Buzzard and Jan Nekovář*. Cambridge University Press, (2007).
- [16] P. COLMEZ – “Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\phi, \Gamma)$ -modules”, *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.
- [17] E. GROSSE-KLÖNNE – “On the universal module of  $p$ -adic spherical Hecke algebras”. *Prépublication*, [www.math.hu-berlin.de/~zyska/Grosse-Kloenne/Preprints.html](http://www.math.hu-berlin.de/~zyska/Grosse-Kloenne/Preprints.html).
- [18] ——— “ $p$ -torsion coefficient systems for  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  and  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ”, *J. Algebra* **342** (2011), Issue 1, p. 97–110.
- [19] F. HERZIG – “The weight in a Serre type conjecture for tame  $n$ -dimensional Galois representations”, Ph. D. thesis, 2006.

- [20] F. HERZIG – “The weight in a Serre type conjecture for tame  $n$ -dimensional Galois representations”, *Duke Math. J.* **149** (2009), p. 37–116.
- [21] F. HERZIG – “A Satake isomorphism in characteristic  $p$ ”, *Compositio Math.* **147** (2011), no. 1, p. 263–283.
- [22] Y. HU – “Diagrammes canoniques et représentations modulo  $p$  de  $GL_2(F)$ ” *Prépublication*, à paraître au Journal de l’Institut de Mathématiques de Jussieu.
- [23] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [24] A. V. JEYAKUMAR – “Principal indecomposable representations for the group  $SL(2, q)$ ”, *J. Algebra* **30** (1974), p. 444–458.
- [25] T. Y. LAM – *A First course in noncommutative rings*, Springer (1991).
- [26] ———, “Lectures on modules and rings. *Graduate Texts in Mathematics*, **189**. Springer-Verlag, (1999).
- [27] G. LUSZTIG – “Affine Hecke algebras and their graded version”, *Journal of A.M.S.* **Vol. 2, No.3**, (1989).
- [28] R. OLLIVIER – “Modules simples en caractéristique  $p$  sur l’algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de  $GL(3, F)$ ”. *Journal of Algebra* **304** p. 1–38 (2006).
- [29] ———, “Platitude du pro- $p$ -module universel de  $GL_2(F)$  en caractéristique  $p$ ”, *Compositio Math.* **143** p. 703–720 (2007).
- [30] ———, “Le foncteur des invariants sous l’action du pro- $p$ -Iwahori de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ”, *J. für die reine und angewandte Mathematik* **635** p. 149–185 (2009).
- [31] ———, “Parabolic induction and Hecke modules in characteristic  $p$  for  $p$ -adic  $GL_n$ ”, *Algebra and Number Theory* **4-6** p. 701–742 (2010).
- [32] V. PASKUNAS – “Coefficient systems and supersingular representations of  $GL_2(F)$ ”, *Mém. Soc. Math. Fr. (NS)* **99** (2004).
- [33] P. SCHNEIDER & U. STUHLER – “Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building”, *Publ. Math. IHES* **85** p. 97–191 (1997).
- [34] P. SCHNEIDER & U. STUHLER – “Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field”, *J. Reine Angew. Math.* **436** p. 19–32 (1993).
- [35] P. SCHNEIDER & M.-F. VIGNÉRAS – “A functor from smooth  $\mathfrak{o}$ -torsion representations to  $(\phi, \Gamma)$ -modules”, *Prépublication*, [www.math.uni-muenster.de/u/schneider/](http://www.math.uni-muenster.de/u/schneider/) (2009).
- [36] J.-P. SERRE – “Linear representations of finite groups”, Graduate Texts in Math. 42, Springer.
- [37] M.-F. VIGNÉRAS – “Représentations  $l$ -modulaires d’un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$ .” Progress in Mathematics, 137. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).
- [38] ——— – “Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups”, *Selecta Math. (N.S.)* **4** no. 4, p. 549–623 (1998).
- [39] ——— “Representations modulo  $p$  of the  $p$ -adic group  $GL(2, F)$ ”, *Compositio Math.* **140** p. 333–358, (2004).
- [40] ——— “Pro- $p$ -Iwahori Hecke ring and supersingular  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -representations”, *Mathematische Annalen* **331** p. 523–556. Erratum volume **333**, no. 3, p. 699–701, (2005).
- [41] ——— “A criterion for integral structures and coefficient systems on the tree of  $PGL(2, F)$ ”, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **4** p. 1291–1316 (2008).

---

RACHEL OLLIVIER, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027 &  
 Laboratoire de Mathématiques de Versailles, Université de Versailles Saint-Quentin, 45 avenue des Etats-  
 Unis, 78035 Versailles Cedex • *E-mail* : [ollivier@math.columbia.edu](mailto:ollivier@math.columbia.edu)  
 VINCENT SÉCHERRE, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, Université de Versailles Saint-Quentin, 45  
 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles Cedex • *E-mail* : [vincent.secherre@math.uvsq.fr](mailto:vincent.secherre@math.uvsq.fr)