Platitude du pro-p-module universel de $\mathrm{GL}_2(F)$ en caractéristique p

Rachel Ollivier

Abstract

Let F be a p-adic field with uniformizer π, we consider $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi$ and $I(1)$ the pro-p-Iwahori subgroup of G. The exploration of the smooth mod p-representations of G motivates the study of the space of functions with values in $\overline{\mathbb{F}}_p$ and compact support in the set of right cosets $I(1)\backslash G$. We show that this universal module is flat over the pro-p-Hecke algebra if and only if the cardinal of the residue field of F is equal to p.

1. Introduction

L'étude des représentations lisses irréductibles modulo p du groupe linéaire général p-adique GL_2 a été initiée en 1994 par L.Barthel et R.Livné et a connu un essor en 2000 avec les travaux de C.Breuil puis M.-F.Vignéras. Elle s'appuie en particulier sur le rôle prépondérant joué par le pro-p-Sylow du sous-groupe d'Iwahori : toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse non nulle admet un vecteur non trivial invariant par ce pro-p-groupe. Cette propriété suggère d'approcher les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses par l'étude des modules à droite sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori. Le passage des représentations lisses vers ces modules s'opère *via* le foncteur des invariants sous le pro-p-Iwahori, celui des modules vers les représentations lisses, par produit tensoriel sur l'algèbre de Hecke par le module universel relatif au pro-p-Iwahori. L'objet de cet article est de donner un critère d'exactitude pour ce dernier foncteur.

La platitude (et même la liberté) du $\overline{\mathbb{F}}_p$-module universel relatif au sous-groupe compact maximal sur son algèbre de Hecke est un ingrédient important pour la classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles du groupe p-adique GL_2 qui sont des sous-quotients d'induites paraboliques. La courte preuve géométrique donnée par [BL94, Théorème 10] a inspiré le travail sur l'arbre de Bruhat-Tits du présent article. Par ailleurs, l'intérêt de la platitude de modules universels n'est pas un trait propre au cadre de la caractéristique p. Le module universel relatif au sous-groupe compact maximal de GL_n, $n \geq 2$, a été fructueusement étudié en différentes caractéristiques ([Laz99], [BO03], etc.).

On désigne par F un corps local non-archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, avec $q = p^\ell$, $\ell \geq 1$, par O_F son anneau d'entiers et par π une uniformisante. Soit $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi$. On note I le sous-groupe d'Iwahori standard de G et $I(1)$ l'unique pro-p-Sylow de I. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 – *Le module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est projectif sur l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$.*
– *Le module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ si et seulement si le cardinal du corps résiduel de F est premier, égal à p. Dans ce cas, c'est même un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module projectif et fidèlement plat.*

2000 Mathematics Subject Classification 20C08, 20G05, 22E50.
Keywords: pro-p-Iwahori Hecke algebra, mod p representations, universal module
This file documents compositio version 1.0b and was last revised 2002/12/18.

1.1 Algèbre de Hecke et modules universels

1.1.1 Toutes les représentations considérées sont lisses : les stabilisateurs des points sont ouverts. On appelle caractère une représentation de dimension 1. Pour les rappels au sujet des algèbres de Hecke, on se réfère à [Vig04, A.1]. On désigne par R un anneau commutatif unitaire d'unité 1_R. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et $\sigma : K \to \mathrm{GL}(V)$ une R-représentation de K de type fini sur R. On note $ind_K^G\sigma$ l'induite compacte de σ. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G,\sigma)$ est l'algèbre des entrelacements

$$\mathcal{H}_R(G,\sigma) = End_{R[G]}(ind_K^G\,\sigma).$$

On suppose que $\sigma : K \to R^*$ est un caractère. Un base de l'induite compacte du caractère σ est l'ensemble $\{f_{Kg,\sigma},\ \ g \in K\backslash G\}$ où l'on note $f_{Kg,\sigma}$ l'élément de $ind_K^G\sigma$ de support Kg et de valeur 1_R en g. L'algèbre de Hecke de σ s'identifie avec la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ munie du produit de convolution décrit par [Vig04, A.1]. On dit de $g \in G$ qu'il entrelace le caractère σ si pour tout $k \in K \cap gKg^{-1}$ on a $\sigma(k) = \sigma(g^{-1}kg)$. L'élément $T_{g,\sigma} \in \mathcal{H}_R(G,\sigma)$ de support KgK et de valeur 1_R en g est alors bien défini.

On suppose que $\sigma = 1$ est le caractère trivial de K. On note alors $\mathcal{H}_R(G,K)$ son algèbre de Hecke. On notera simplement T_g l'élément $T_{g,1}$ qui est bien défini pour tout $g \in G$. L'induite compacte $ind_K^G 1$ du caractère trivial de K s'identifie avec le $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$ des fonctions à valeurs dans R et à support fini dans l'ensemble des classes à droites de G modulo K. On notera $\mathbf{1}_K$ l'élément générateur $f_{K,1}$ égal à la fonction caractéristique de K. Le module universel $R[K\backslash G]$ est naturellement un module à gauche sur la R-algèbre de Hecke de K. Pour tout $g \in G$, l'action de T_g est entièrement déterminée par l'action de T_g sur l'élément $\mathbf{1}_K$ car l'action de la R-algèbre de Hecke de K commute à celle de G. Elle est donnée par

$$T_g(\mathbf{1}_K) = \sum_{x \in K\backslash KgK} x^{-1}\mathbf{1}_K = \sum_{x \in K\backslash KgK} \mathbf{1}_{Kx}.$$

Le $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$ définit un foncteur de la catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite dans la catégorie des R-représentations de G engendrées par leurs K-invariants :

$$M \quad \longmapsto \quad M \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G].$$

1.1.2 Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_2(F)$, et $I(1)$ son unique pro-p-Sylow : I (resp. $I(1)$) est l'image inverse, par la réduction modulo π, $\ \mathrm{GL}_2(O_F) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, du sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ des matrices triangulaires (resp. unipotentes) supérieures. Les sous-groupes $I(1)$ et I de $\mathrm{GL}_2(F)$ sont ouverts et compacts. Ils sont normalisés par l'élément $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Le quotient $I/I(1)$ s'identifie au tore diagonal $T(\mathbb{F}_q)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I est trivial sur $I(1)$ et s'identifie avec un caractère de $T(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q^*$.

On identifie les sous-groupes I et $I(1)$ de $\mathrm{GL}_2(F)$ avec leurs images respectives dans G. Le théorème 1 nous renseigne quant à l'exactitude des foncteurs respectivement définis par les $\overline{\mathbb{F}}_p$-modules universels $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ et $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$.

1.2 L'arbre de $\mathrm{PGL_2(F)}$

On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de $\mathrm{PGL_2(F)}$. On se réfère à [Ser77]. Nous considérerons les arêtes de $\mathcal{T}$ comme orientées. L'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ s'identifie avec l'ensemble des réseaux de F^2 à homothétie près. Il est muni d'une action à gauche de G qui est transitive. On note c_0 le sommet correspondant au réseau $O_F \oplus O_F$. Son stabilisateur sous l'action de G est égal à $\mathrm{GL_2(O_F)}$. Ainsi, l'ensemble des sommets de l'arbre s'identifie avec les classes à gauche $G/\mathrm{GL_2(O_F)}$. L'action de G sur l'ensemble des sommets induit une action transitive sur l'ensemble des arêtes. On note c_1 le sommet correspondant au réseau $O_F \oplus \pi O_F$ et u l'arête d'origine c_0 et d'extrémité c_1. Son stabilisateur est égal au sous-groupe d'Iwahori I, donc l'ensemble des arêtes de l'arbre s'identifie avec les classes à gauche G/I.

Soit v une arête d'origine c et d'extrémité c'. On désigne par $\tilde{v}$ et l'on appelle *arête opposée* à v l'arête d'origine c' et d'extrémité c. Par exemple, l'élément ω échange les sommets c_0 et c_1 et envoie l'arête u sur son opposée $\tilde{u}$. L'application involutive $v \mapsto \tilde{v}$ définie sur l'ensemble des arêtes s'étend en un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel de base l'ensemble des arêtes. Pour X un ensemble d'arêtes, on notera $\tilde{X}$ l'ensemble des arêtes opposées.

Toute arête d'extrémité c, distincte de $\tilde{v}$, sera dite *incidente* à v. Toute arête d'origine c', distincte de $\tilde{v}$, sera dite *adjacente* à v. On appelle *faisceau* issu de v et l'on note $\mathcal{F}_v$ l'ensemble des q arêtes adjacentes à v. L'action de G sur l'ensemble des arêtes transforme un faisceau en un faisceau.

L'ensemble des sommets de l'arbre est naturellement muni d'une distance d. On dira de l'arête v d'origine c et d'extrémité c' qu'elle est *sortante* si $d(c_0, c) < d(c_0, c')$. Dans le cas contraire, on dira qu'elle est *rentrante*.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on désigne par S_i la sphère de rayon i, c'est-à-dire l'ensemble des sommets à distance i de c_0. Nous dirons de l'arête v qu'elle est à distance i (sous-entendu de l'origine c_0) si l'on a $i = max\{d(c_0, c), d(c_0, c')\}$. Si v est sortante (resp. rentrante), cela signifie que son extrémité (resp. son origine) appartient à S_i.

Dans la partie 2.3, on fixera un système de représentants des classes à gauche de G modulo I. On se propose ici d'en décrire un explicitement. On note $[\,.\,] : \mathbb{F}_q \to O_F$ l'application de Teichmüller et l'on identifie $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ avec O_F *via*

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & O_F \\ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \pi^j [x_j]. \end{array}$$

Soit $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$. On plonge $\mathbb{F}_q^i$ dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ en identifiant $(x_0, ..., x_{i-1}) \in \mathbb{F}_q^i$ avec $(x_0, ..., x_{i-1}, 0, 0, ...) \in \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$. On pose $g_\emptyset^0 = \omega^{-1}$, $g_\emptyset^1 = 1$ et, pour $x \in \mathbb{F}_q^i$,

$$g_x^0 = \begin{pmatrix} -a(x) & \pi^{i-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & \pi^i \end{pmatrix}.$$

Un système de représentants des classes à gauche de G modulo $\mathrm{GL}_2(O_F)$ est donné par ([Bre03]) :

$$\{1, \omega, g_x^\epsilon \omega, \ \text{ pour } \epsilon \in \{0, 1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, la sphère de rayon i est $S_i = \{(g_x^0\omega)\, c_0, \ \ (g_y^1\omega)\, c_0, \text{ pour } x \in \mathbb{F}_q^i, y \in \mathbb{F}_q^{i-1}\}$. Un système de représentants des classes à gauche de G modulo I est donné par :

$$\{1, g_x^\epsilon, \omega, g_x^\epsilon \omega, \ \text{ pour } \epsilon \in \{0, 1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}. \tag{1}$$

En effet, pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, l'arête $u_x^\epsilon := g_x^\epsilon u$ est l'unique arête sortante d'extrémité $(g_x^\epsilon\omega)c_0$. Le faisceau issu de u_x^ϵ est $\mathcal{F}_{u_x^\epsilon} = \{u^\epsilon_{(x,s)}, \ s \in \mathbb{F}_q\}$. L'arête opposée à u_x^ϵ est $\tilde{u}_x^\epsilon = g_x^\epsilon \omega\, u$.

Notation 1 *Lorsque l'on travaillera avec les $q+1$ arêtes $\{u, u_s^0\}_{s\in\mathbb{F}_q}$ d'origine c_0, on les notera simplement $\{u, u_s\}_{s\in\mathbb{F}_q}$.*

Pour $i \in \mathbb{N}$, on désigne par E_i l'ensemble des arêtes sortantes à distance $i+1$ de c_0, c'est-à-dire dont l'origine appartient à la sphère S_i et l'extrémité appartient à la sphère S_{i+1}. Il est de cardinal $|E_i| = q^i(q+1)$. On a $E_0 = \{u, \ u_s\}_{s\in\mathbb{F}_q}$ et $E_i = \{u_x^0, \ u_y^1, \text{ pour } x \in \mathbb{F}_q^{i+1}, \ y \in \mathbb{F}_q^i\}$ pour $i \geq 1$.

2. Démonstration du théorème 1

2.1 Décomposition de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de G.

2.1.1 On note $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ le groupe des $\mathbb{F}_q$-caractères du tore fini. Il est naturellement muni d'une action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_2$ et l'on note Γ l'ensemble de ses orbites sous cette action. Soit $\gamma \in \Gamma$ l'orbite d'un caractère $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On considère χ comme un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I trivial sur $I(1)$ et l'on désigne par σ_γ la représentation de I définie par $\sigma_\gamma = \chi$ si $|\gamma| = 1$, $\sigma_\gamma = \chi \oplus \tau\chi$ si $|\gamma| = 2$, où τ est l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$. La proposition 2.1 de [Vig04] donne :

Proposition 1 – *Soit $\chi' : I \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. Si χ et χ' ne sont pas conjugués sous l'action de $\mathfrak{S}_2$, il n'existe pas d'entrelacement non trivial entre les $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_I^G\chi$ et $ind_I^G\chi'$.*

– *On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$\begin{array}{ccc} ind_I^G\tau\chi & \longrightarrow & ind_I^G\chi \\ f_{I,\tau\chi} & \longmapsto & \omega f_{I,\chi}. \end{array} \tag{2}$$

Remarque 1 – *Si $|\gamma| = 1$, l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$ est égal à la composante (I,χ)-isotypique de $ind_I^G\chi$, d'après la première assertion de la proposition. Par définition de l'algèbre de Hecke de χ, c'est le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre de base $f_{I,\chi}$.*

– *Si $|\gamma| = 2$, l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$ est égal à la somme directe de sa composante (I,χ)-isotypique et de sa composante $(I,\tau\chi)$-isotypique. La première est égale au sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre de $ind_I^G\chi$ engendré par $f_{I,\chi}$. Son image sous l'action ω est égale à la composante $(I,\tau\chi)$-isotypique de $ind_I^G\chi$. Ainsi, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre de base $\{f_{I,\chi}, \omega f_{I,\chi}\}$ est égal à l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$.*

Proposition 2 *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ est isomorphe au produit, pour γ parcourant Γ, des $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$. Plus précisément, il existe une famille $(\epsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ d'idempotents centraux orthogonaux telle que*

$$1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \epsilon_\gamma \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma) \simeq \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))\epsilon_\gamma.$$

Démonstration. C'est la proposition 3.1 *loc.cit.* Sa preuve s'appuie sur la décomposition de l'induite compacte du caractère trivial en la somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$ind_{I(1)}^G\mathbf{1} \simeq \bigoplus_{\chi\in\hat{T}(\mathbb{F}_q)} ind_I^G\chi = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} ind_I^G\sigma_\gamma, \tag{3}$$

obtenue du fait que $q-1$ est inversible dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et que $\overline{\mathbb{F}}_p$ contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité. Par la proposition 1, cette décomposition se traduit par l'écriture de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori en un produit d'algèbres de Hecke : $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)) \simeq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$. On note ϵ_χ l'élément de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ égal à la projection $ind_{I(1)}^G\mathbf{1} \twoheadrightarrow ind_I^G\chi$. L'idempotent central $\epsilon_\gamma \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ de la proposition est la projection $ind_{I(1)}^G\mathbf{1} \twoheadrightarrow ind_I^G\sigma_\gamma$. Il est égal à ϵ_χ si γ est de cardinal 1, à $\epsilon_\chi + \epsilon_{\tau\chi}$ si γ est de cardinal 2.

□

2.1.2 Nous étudions maintenant la partie régulière de l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori. Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ un caractère d'orbite γ sous l'action de $\mathfrak{S}_2$ que l'on suppose régulier, c'est-à-dire que γ est de cardinal 2. Remarquons que cela suppose que $q > 2$. D'après la proposition 1, l'algèbre

$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices de taille 2 sur l'anneau $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$: les algèbres de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$ et $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$ sont Morita équivalentes. En particulier, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module à gauche correspondant, par équivalence de Morita, au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$-module à gauche $ind_I^G\sigma_\gamma$ n'est autre que $ind_I^G\chi$ puisque l'on a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(ind_I^G\chi, ind_I^G\sigma_\gamma) & \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} & ind_I^G\chi & \xrightarrow{\sim} & ind_I^G\sigma_\gamma \\ f & \otimes & x & \longmapsto & f(x). \end{array} \tag{4}$$

L'équivalence de Morita préservant la platitude, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$-module $ind_I^G\sigma_\gamma$ est plat si et seulement si le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module $ind_I^G\chi$ est plat.

2.1.3 Nous décrivons la démarche suivie pour démontrer le théorème. D'après la proposition 2 et sa preuve, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat si et seulement si

$$ind_I^G\sigma_\gamma \text{ est un } \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)\text{-module plat pour tout } \gamma\in\Gamma.$$

- Lorsque γ est de cardinal 1, on dit que l'on est dans le cas Iwahori et l'on est ramené, quitte à tordre par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de G, à l'étude de la platitude du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$. C'est l'objet de la partie 2.2. On y montre que $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$-module projectif. De plus, son sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct.
- Lorsque $\gamma=\{\chi,\chi\tau\}$ est de cardinal 2, c'est-à-dire que l'on est dans le cas régulier, on étudie la platitude du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$-module $ind_I^G\sigma_\gamma$. D'après 2.1.2, on est ramené à l'étude de la platitude $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module $ind_I^G\chi$, à laquelle la partie 2.3 est consacrée : on y montre que $ind_I^G\chi$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module plat si et seulement si $q=p$.

  Lorsque $q=p$, on montre de plus que $ind_I^G\chi$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre et que son sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct (proposition 7). Ainsi, $ind_I^G\sigma_\gamma$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$-module libre et son sous-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct.

On aura ainsi montré que le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat si et seulement si $q=p$.

Dans le cas où $q=p$, on aura même prouvé que c'est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module projectif et que son sous-module des $I(1)$-invariants en est un facteur direct. Par définition, ce dernier est isomorphe à $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$. Ainsi, pour tout idéal propre à droite $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$, l'espace vectoriel quotient $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]/\mathcal{A}\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ ne saurait être nul. Cela signifie que $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module fidèlement plat, d'après [Bou61, Chapitre 1 §3, n°1 Proposition 1].

2.2 Platitude du module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ sur l'algèbre de Hecke-Iwahori

On désigne par H la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$. Elle est engendrée par les éléments S et T avec les relations $S(S+1)=0$, $T^2=1$, où S et T sont respectivement les éléments de H de support $I\tau I$ et $I\omega$, et où l'on identifie l'élément non trivial $\tau\in\mathfrak{S}_2$ avec $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in G$ ([Vig04, 1.1]). Elle se décompose en la somme directe de H-modules projectifs $H=HS\oplus H(S+1)$.

Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est engendré par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_I$ de I. C'est un élément invariant sous l'action de I. Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est donnée par l'ensemble des $g.\mathbf{1}_I$ où g parcourt un système de représentants des classes à gauche G/I. Il existe une unique identification entre les arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ et une base de l'espace $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ telle que l'arête u corresponde à $\mathbf{1}_I$ et qui soit compatible avec l'action de G. On considérera dorénavant les éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ comme des combinaisons linéaires d'arêtes de l'arbre.

Théorème 2 *Il existe un ensemble V d'arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ tel que le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est isomorphe à la somme directe de modules projectifs*

$$\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G] \quad = \quad Hu \oplus \bigoplus_{v\in V} HSv \quad \simeq \quad H \oplus \bigoplus_{v\in V} HS.$$

Corollaire 1 *Le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est un H-module fidèlement plat.*

La suite de la partie 2.2 est consacrée à la démonstration de ce théorème.

2.2.1 *Action de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$.* Les actions des générateurs S et T de H sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ sont entièrement déterminées par les données de $S(u)$ et $T(u)$ car l'action de H commute à celle de G.

- On a $T(u) = \omega\, u = \tilde{u}$. Donc, l'action de T sur une arête renverse son orientation.
- On a la décomposition ([Vig04, A.3]) :

$$I\tau I = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I\tau \begin{pmatrix} 1 & [s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & [s] \end{pmatrix} = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I(g_s^0)^{-1}$$

  Ainsi $S(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} g_s^0 u = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} u_s$ et l'action de S envoie une arête v d'origine c sur la somme des q arêtes d'origine c distinctes de v.

Cette description géométrique des actions de S et T est la clef des preuves de la partie 2.2. Nous l'utiliserons à maintes reprises sous les formes suivantes : soit v une arête de l'arbre d'origine c.

$\mathbf{G_1}$: L'action de $(S+1)$ transforme v en la somme des $q+1$ arêtes d'origine c.
$\mathbf{G_2}$: L'action de ST transforme v en la somme des q arêtes adjacentes à v.
$\mathbf{G_3}$: Soit v' une arête adjacente à v. On a $(1+S)Tv = (1+S)v'$.

2.2.2 *Une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$.* Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est donnée par l'ensemble des arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$. Nous allons en donner une autre en construisant les ensembles V_i suivants :

- V_0 est l'ensemble des $q+1$ arêtes sortantes à distance 1.
- Pour $i \geq 1$, construisons V_i un ensemble d'arêtes sortantes à distance $i{+}1$. Soit v une arête sortante à distance i. Dans le faisceau issu de v on choisit une arête que l'on appelle exceptionnelle. On note V_v l'ensemble des arêtes non exceptionnelles issues de v et l'on pose $V_i := \bigcup_v V_v$, où v parcourt l'ensemble des arêtes sortantes à distance i.

  Les cardinaux des ensembles considérés sont respectivement :
  $$|V_0| = q+1\,;\ \text{pour } i\in\mathbb{N},\ |V_{i+1}| = (q+1)(q^{i+1}-q^i).$$

La réunion des $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des arêtes sortantes de l'arbre, privé des demi-droites d'origine un sommet à distance supérieure ou égale à 1, constituées par des arêtes exceptionnelles.

Rappelons que E_i désigne l'ensemble des arêtes sortantes à distance $i+1$.

Lemme 1 *Soit $i \in \mathbb{N}$.*
L'ensemble $\{(ST)^j v,\ v\in V_{i-j}\}_{0\leq j\leq i}$ est une base de l'espace vectoriel de base E_i.
L'ensemble $\{T(ST)^j v,\ v\in V_{i-j}\}_{0\leq j\leq i}$ est une base de l'espace vectoriel de base $\tilde{E}_i$.

Démonstration. Posons $X_i = \{(ST)^j v,\ v \in V_{i-j}\}_{0 \leq j \leq i}$. Notons tout d'abord, grâce à $\mathbf{G_2}$, que pour tout $j \in \{0,..,i\}$ et toute arête $v \in V_{i-j}$, l'élément $(ST)^j v$ est la somme des q^j arêtes sortantes à distance $i+1$ de la branche de v. Ainsi, tout élément de X_i appartient à l'espace vectoriel engendré par E_i. On en déduit aussi que pour j, k éléments distincts de $\{0,..,i\}$, les ensembles $\{(ST)^j v,\ v \in V_{i-j}\}$ et $\{(ST)^k v,\ v \in V_{i-k}\}$ sont disjoints et que le cardinal de X_i est :

$$|X_i| = \sum_{j \in \{0,..,i\}} |V_{i-j}| = q + 1 + \sum_{j \in \{1,..,i\}} (q+1)(q^j - q^{j-1}) = q^i(q+1) = |E_i|.$$

Montrons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$ que X_i engendre l'espace vectoriel de base E_i.

Pour $i = 0$ c'est clair. Soit $i \geq 1$. Supposons l'assertion vérifiée pour $i-1$. Soit $v \in E_i$. Si v n'est pas exceptionnelle, alors $v \in V_i \subset X_i$. Sinon, on note $v' \in E_{i-1}$ l'arête à laquelle v est adjacente. D'après $\mathbf{G_2}$, v est une combinaison linéaire de STv' et des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à v'. Ces dernières appartiennent à X_i. D'autre part, par hypothèse de récurrence, v' appartient à l'espace vectoriel engendré par X_{i-1}, donc STv' appartient à l'espace vectoriel engendré par $STX_{i-1} \subset X_i$. Ainsi, v appartient à l'espace vectoriel engendré par X_i. □

Une base de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est donc donnée par

$$\{(ST)^k v,\ T(ST)^k v,\ \ v \in V_i\}_{i,k \in \mathbb{N}}. \tag{5}$$

2.2.3 *Expression de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ comme limite inductive de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$-modules.* On définit la famille d'espaces vectoriels $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, croissante pour l'inclusion en désignant par Y_i l'espace vectoriel de base :

$$\{(ST)^k v,\ T(ST)^k v,\ v \in V_j\}_{\ 0 \leq j \leq i,\ k \in \mathbb{N}}.$$

Remarque 2 *D'après le lemme 1 et par définition de Y_i, l'ensemble des arêtes (rentrantes et sortantes) à distance inférieure ou égale à $i+1$ est contenu dans Y_i.*

Proposition 3 *Pour $i \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel Y_i de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est stable sous l'action de H.*

Corollaire 2 *Pour $i \in \mathbb{N}$, le H-module Y_i est engendré par $\bigcup_{0 \leq j \leq i} V_j$.*

Preuve de la proposition 3. Puisque les générateurs S et T de H vérifient, $T^2 = 1$ et $S^2 = -S$, il suffit, pour montrer que Y_i est stable sous l'action de H, de s'assurer que

$$Sv \in Y_i, \quad \text{pour tout } v \in V_j,\ \ 0 \leq j \leq i.$$

– Soit $v \in V_0$, Sv est la somme des arêtes appartenant à V_0 différentes de v. Donc $Sv \in Y_0$ et Y_0 est stable sous l'action de H.
– Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que Y_i est stable sous l'action de H. Soit $v \in V_j$, $j \leq i$, alors $Sv \in Y_i$ par hypothèse de récurrence, donc $Sv \in Y_{i+1}$. Soit $v \in V_{i+1}$. C'est une arête sortante à distance $i+2$. D'après la description géométrique de l'action de S, Sv est une combinaison linéaire d'une arête rentrante à distance $i+1$ et de $q-1$ arêtes sortantes à distance $i+2$. D'après la remarque 2, ces arêtes appartiennent à Y_{i+1}, donc $Sv \in Y_{i+1}$. Ainsi, Y_{i+1} est stable sous l'action de H.

□

Lemme 2 *Pour tout $v \in V_{i+1}$, on a $(1+S)v \in Y_i$.*

Démonstration. Soit $v' \in E_i$, l'arête sortante à distance $i+1$ à laquelle v est adjacente. D'après la remarque 2, l'arête v' est contenue dans Y_i, qui est stable sous l'action de H. Or, d'après $\mathbf{G_3}$, on a $(1+S)v = (1+S)Tv'$. Ainsi, $(1+S)v \in Y_i$. □

Remarque 3 *Le H-module Y_i est engendré par les arêtes sortantes à distance inférieure ou égale à $i+1$. En particulier il ne dépend pas du choix des arêtes exceptionnelles. De plus, l'action de $I(1)$ sur les arêtes de l'arbre commute à celle de H et, puisque $I(1)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(O_F)$, elle conserve la distance et l'orientation. Ainsi, le H-module Y_i est stable sous l'action de $I(1)$.*

2.2.4 *Projectivité de Y_0.* On considère le morphisme de H-modules suivant :

$$\begin{array}{cccccc} \Phi: & H & \times & (HS)^{q-1} & \longrightarrow & Y_0 \\ & (h & , & (h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*}) & \longmapsto & hu+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*} h_sS\,u_s. \end{array}$$

Lemme 3 *Le morphisme de H-modules Φ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le H-module Y_0 est engendré par l'ensemble $V_0=\{u,u_s,s\in\mathbb{F}_q\}$. D'après $\mathbf{G_1}$, $(1+S)u$ est égal à la somme des arêtes u_s pour s parcourant $\mathbb{F}_q$. Puisque $S(S+1)=0$, on en déduit que $Su_0=-\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*} Su_s$, donc Su_0 appartient à l'image de Φ. Ainsi, l'image de Φ contient u, et Su_s pour tout $s\in\mathbb{F}_q$. Mais $u_s=(1+S)u-Su_s$ donc Φ est surjectif.

Montrons maintenant que Φ est injectif. Soit $(h,(h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*})\in H\times(HS)^{q-1}$. L'élément $h\in H$ s'écrit de façon unique

$$h=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k(ST)^k+b_kT(ST)^k+c_k(ST)^kS+d_kT(ST)^kS,\ avec\ a_k,b_k,c_k,d_k\in\overline{\mathbb{F}}_p.$$

L'élément $h_sS\in HS$ s'écrit de façon unique

$$h_sS=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k^s(ST)^kS+b_k^sT(ST)^kS,\ avec\ a_k^s,b_k^s\in\overline{\mathbb{F}}_p.$$

On a, d'après $\mathbf{G_1}$,

$$\begin{array}{rcl} hu & = & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}}(a_k(ST)^ku+b_kT(ST)^ku+c_k(ST)^ku_0+d_kT(ST)^ku_0+\sum\limits_{r\in\mathbb{F}_q^*}c_k(ST)^ku_r+d_kT(ST)^ku_r) \\ h_sSu_s & = & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}}(a_k^s(ST)^ku+b_k^sT(ST)^ku+a_k^s(ST)^ku_0+b_k^sT(ST)^ku_0+\sum\limits_{r\in\mathbb{F}_q^*,r\neq s}a_k^s(ST)^ku_r+b_k^sT(ST)^ku_r) \end{array}$$

Ainsi l'image par Φ de $(h,(h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*})$ est égale à

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in\mathbb{N}}((a_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s)(ST)^ku+(b_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s)T(ST)^ku) \\ &+\sum_{k\in\mathbb{N}}((c_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s)(ST)^ku_0+(d_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s)T(ST)^ku_0) \\ &+\sum_{k\in\mathbb{N},\,r\in\mathbb{F}_q^*}((c_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}a_k^s)(ST)^ku_r+(d_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}b_k^s)T(ST)^ku_r). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, la famille $\{(ST)^ku,T(ST)^ku,(ST)^ku_s,T(ST)^ku_s\}_{k\in\mathbb{N},s\in\mathbb{F}_q}$ est libre. Donc, si l'image par Φ de $(h,(h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*})$ est nulle, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s=0, \\ c_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s=0, \\ c_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}a_k^s=0,\forall r\in\mathbb{F}_q^* \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} b_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s=0, \\ d_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s=0, \\ d_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}b_k^s=0,\forall r\in\mathbb{F}_q^*, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire $a_k = c_k = 0$, et $a_k^s = 0, \forall s \in \mathbb{F}_q^*$, $b_k = d_k = 0$, et $b_k^s = 0, \forall s \in \mathbb{F}_q^*$. Ainsi, $(h, (h_s S)_{s \in \mathbb{F}_q^*}) = 0$ et Φ est injectif. $\square$

Le lemme 3 montre que le H-module Y_0 est égal au H-module projectif

$$Y_0 \;=\; Hu \,\oplus\, \bigoplus_{s \in \mathbb{F}_q^*} HS\, u_s \;\simeq\; H \,\oplus\, (HS)^{q-1}. \tag{6}$$

2.2.5 *Projectivité de Y_{i+1}, $i \in \mathbb{N}$.*

Lemme 4 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \Phi_i : & H^{|V_{i+1}|} & \rightarrow & Y_{i+1}/Y_i \\ & (h_v)_{v \in V_{i+1}} & \longmapsto & \sum\limits_{v \in V_{i+1}} h_v v \mod Y_i \end{array}$$

est un morphisme de H-modules surjectif de noyau $H(S+1)^{|V_{i+1}|}$.

Démonstration. D'après la définition de Y_{i+1}, le morphisme Φ_i est bien surjectif. L'inclusion $H(S+1)^{|V_{i+1}|} \subset Ker\,\Phi_i$ résulte du lemme 2. Soit $(h_v)_v \in V_{i+1}$ un élément du noyau de $H^{|V_{i+1}|}$. Pour tout $v \in V_{i+1}$, l'élément $h_v \in H$ s'écrit de façon unique :

$$h_v = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^v (ST)^k + b_k^v T(ST)^k + c_k^v (ST)^k S + d_k^v T(ST)^k S, \;\text{ avec }\; a_k^v, b_k^v, c_k^v, d_k^v \in \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Puisque $Sv = -v \mod Y_i$ pour tout $v \in V_{i+1}$, on a

$$\sum_{v \in V_{i+1}} h_v v = \sum_{v \in V_{i+1}} ((a_k^v - c_k^v)(ST)^k v + (b_k^v - d_k^v) T(ST)^k v) \quad \mod Y_i.$$

Puisque la famille $\{(ST)^k v, T(ST)^k v,\ v \in V_{i+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est libre modulo Y_i, supposer que $(h_v)_{v \in V_{i+1}}$ appartient au noyau de Φ_i implique que pour tout $v \in V_{i+1}$, $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k^v = c_k^v$, $b_k^v = d_k^v$, c'est-à-dire $h_v \in H(S+1)$, pour tout $v \in V_{i+1}$. $\square$

Ainsi, le H-module Y_{i+1}/Y_i est isomorphe à une somme de copies de $H/H(S+1) \simeq HS$. C'est un module projectif et l'on a la décomposition en somme directe de H-modules projectifs :

$$Y_{i+1} \;=\; Y_i \,\oplus\, \bigoplus_{v \in V_{i+1}} HS\, v \;\simeq\; Y_i \,\oplus\, (HS)^{|V_{i+1}|}. \tag{7}$$

Des isomorphismes (6) et (7), on déduit par récurrence :

$$Y_i = Hu \;\oplus \bigoplus_{v \in V_0 \cup \ldots \cup V_i - \{u, u_0\}} HS\, v \;\simeq H \;\oplus \bigoplus_{v \in V_0 \cup \ldots \cup V_i - \{u, u_0\}} HS. \tag{8}$$

Le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I \backslash G]$ étant la limite inductive de la famille de H-modules $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ croissante pour l'inclusion, on a ainsi démontré le théorème 2 : en posant $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i - \{u, u_0\}$, on a la décomposition en somme directe de H-modules projectifs,

$$\overline{\mathbb{F}}_p[I \backslash G] \;=\; Hu \,\oplus\, \bigoplus_{v \in V} HSv \;\simeq\; H \,\oplus\, \bigoplus_{v \in V} HS.$$

2.3 Platitude du module $ind_{IZ}^{\mathrm{GL}_2(F)} \chi$ sur l'algèbre de Hecke du caractère régulier χ

On suppose dans toute cette section que $q > 2$ et l'on se donne $\chi : \mathbb{F}_q^{*2} \to \mathbb{F}_q^*$ un $\mathbb{F}_q$-caractère régulier du tore fini. On note H_χ l'algèbre de Hecke du caractère χ considéré comme un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I

trivial sur $I(1)$. Soient t_1, t_2 les éléments de G définis par $t_1 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$. L'algèbre de Hecke H_χ est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative de générateurs T_1, T_2 vérifiant $T_1 T_2 = 0$, où, pour $i = 1, 2$, on désigne par T_i l'élément de H_χ de support It_iI et de valeur 1 en t_i ([Vig04, 2.1]). Nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 3 *Soit $a \in \{1, .., q-2\}$. Soit $\chi = 1 \otimes \chi_2 : \mathbb{F}_q^{*2} \to \mathbb{F}_q^*$, le caractère régulier du tore fini tel que $\chi_2(x) = x^a$, $\forall x \in \mathbb{F}_q^*$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) *Le H_χ -module $ind_I^G \chi$ est plat.*
ii) *Le H_χ -module $ind_I^G \chi$ est libre.*
iii) *Les cœfficients des polynômes $(1-X)^a$ et $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$, de degrés respectifs a et $q-1-a$, sont tous non nuls.*
iv) *On a la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $0 \longrightarrow T_1 ind_I^G \chi \longrightarrow ind_I^G \chi \xrightarrow{T_2} T_2 ind_I^G \chi \to 0$.*

Corollaire 3 *Le H_χ-module $ind_I^G \chi$ est plat si et seulement si q est un nombre premier.*

Preuve du corollaire. Quitte à tordre par un caractère de G, on peut toujours se ramener à un caractère χ de la forme décrite dans le théorème. Si $q = p$ la condition iii) du théorème est vérifiée. Si $q > p$, l'élément $x := max\{a, q-1-a\}$ vérifie $x > p-1$ et $(x-p+1)\binom{x}{p-1} = p\binom{x}{p}$. Si p ne divise pas $x-p+1$, alors p divise $\binom{x}{p-1}$ ce qui contredit la condition iii) pour le polynôme $(1-X)^x$. Si p divise $x-p+1$, il divise aussi $q-1-x$, ce qui contredit la condition iii) pour le polynôme $(1-X)^{q-1-x}$. □

Nous allons désormais considérer que $\chi : \mathbb{F}_q^{*2} \to \mathbb{F}_q^*$ est un caractère régulier du tore fini comme dans l'énoncé du théorème 3, c'est-à-dire de la forme $\chi = 1 \otimes \chi_2$, avec

$$\chi_2 : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*, \ x \mapsto x^a, \quad \text{où } a \in \{1, .., q-2\}.$$

Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $ind_I^G \chi$ est donnée par l'ensemble des fonctions $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$ de support Ig^{-1} et de valeur 1 en g^{-1}, où g parcourt le système de représentants (1) des classes à gauche de G modulo I. On établit une bijection entre cette base de $ind_I^G \chi$ et l'ensemble des arêtes de l'arbre en identifiant, pour tout g appartenant au système de représentants (1), l'arête gu avec l'élément $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$. On pourra donc considérer désormais tout élément de $ind_I^G \chi$ comme une combinaison linéaire d'arêtes de l'arbre.

Remarque 4 *Cette identification n'est pas compatible avec l'action de G car l'arête u est invariante sous l'action de I qui agit sur l'élément $f_{I,g}$ par le caractère non trivial χ.*

2.3.1 *Action de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ sur $ind_I^G \chi$.*

2.3.1.1 Les actions de T_1 et T_2 sur $ind_I^G \chi$ sont respectivement entièrement déterminées par la donnée de $T_1(\tilde{u})$ et $T_2(u)$ car l'action de H_χ sur $ind_I^G \chi$ commute à celle de G. On en donne une description géométrique :

– On a la décomposition suivante ([Vig04, Ap. 3]) : $It_1I = \bigcup_{s \in \mathbb{F}_q} I \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ \pi[s] & 1 \end{pmatrix}$. Remarquons que

$\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ \pi[s] & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \omega \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \omega g_s^0$. Ainsi $T_1(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} (\omega g_s^0)u$ et

$$T_1(\tilde{u}) = \omega^{-1}T_1(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} g_s^0 u = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} u_s. \tag{9}$$

– On a la décomposition suivante : $It_2I = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & \pi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega^{-1} = g_s^0\omega^{-1}$, donc

$$T_2(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} g_s^0\omega^{-1}\, u = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} \tilde{u}_s. \tag{10}$$

Ainsi, $T_1(\tilde{u})$ est la somme des q arêtes adjacentes à $\tilde{u}$, et $T_2(u)$ est la somme des q arêtes incidentes à u. Comme dans le cas Iwahori, on pourrait être tenté de généraliser cette observation, sans plus de précautions, afin de décrire l'action de T_1 et de T_2 sur une arête quelconque v de l'arbre. C'est sans compter le fait que le sous-groupe d'Iwahori agit par le caractère non trivial χ sur l'arête u. De la description de l'action de T_1 sur l'arête $\tilde{u}$ et de T_2 sur l'arête u, on peut seulement déduire que :

$\mathbf{G_1^\chi}$: L'action de T_1 transforme v en une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des q arêtes adjacentes à v.

$\mathbf{G_2^\chi}$: L'action de T_2 transforme v en une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des q arêtes incidentes à v.

Par exemple, pour $s \in \mathbb{F}_q$, l'action de T_1 sur l'arête $\tilde{u}_s$ et l'action de T_2 sur l'arête u_s sont données par :

$$T_1(\tilde{u}_s) = u + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} (z-s)^a u_z. \tag{11}$$

$$T_2(u_s) = \tilde{u} + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} (s-z)^{q-1-a} \tilde{u}_z. \tag{12}$$

Montrons la relation (11). La relation (12) s'obtient avec des arguments similaires. D'après l'égalité (9), on a $T_1(\tilde{u}_s) = g_s^0 T_1(\tilde{u}) = g_s^0(u_0 + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} u_{-y}) = g_s^0(g_0^0 + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} g_{-y}^0)u$. Or l'élément $g_s^0 g_0^0 = \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $I(1)$ et fixe l'arête u. D'autre part, pour $y \in \mathbb{F}_q^*$, on calcule l'action de $g_s^0 g_{-y}^0$ sur u :

$$g_s^0 g_{-y}^0 = \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [y] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-[sy] & -[s] \\ [y] & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [y^{-1}]-[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [y] & 1 \\ 0 & -[y^{-1}] \end{pmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$(**) \qquad g_s^0 g_{-y}^0 = \begin{pmatrix} [-s+y^{-1}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [y^{-1}]-[s]-[-s+y^{-1}] & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [y] & 1 \\ 0 & -[y^{-1}] \end{pmatrix}.$$

La première matrice de l'égalité $(**)$ n'est autre que $g_{s-y^{-1}}^0$. La seconde appartient à $I(1)$ et fixe l'arête u, puisque, par définition de l'application de Teichmüller, on a $[y^{-1}]-[s]-[-s+y^{-1}] \in \pi O_F$. La troisième et dernière matrice appartient au sous-groupe d'Iwahori et agit sur l'arête u par le caractère $\chi = 1 \otimes \chi_2$. Ainsi, on a

$$g_s^0 g_{-y}^0 u = \chi_2(-y^{-1})u_{s-y^{-1}}.$$

On a donc bien démontré que $T_1(\tilde{u}_s) = u + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} \chi_2(-y^{-1})u_{s-y^{-1}} = u + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} \chi_2(z-s)u_z$.

2.3.1.2 Souhaitant faire un changement de base adéquat pour simplifier l'expression de l'action de T_1 et T_2, nous construisons une base de l'espace vectoriel engendré par les arêtes sortantes à distance 1 par un procédé d'analyse de Fourier. Fixons ζ un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_q^*$. Le groupe des $\mathbb{F}_q$-caractères de $\mathbb{F}_q^*$ est paramétré par $\mathbb{F}_q^*$: à tout $s \in \mathbb{F}_q^*$, on associe le caractère $\lambda_s : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*$ tel que $\zeta \mapsto s$.

Notation 2 *Notons $w : \mathbb{F}_q^* \to ind_I^G\chi$ la transformée de Fourier de l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^* & \to & ind_I^G\chi \\ s & \mapsto & u_s. \end{array}$$

Elle est donnée en $s \in \mathbb{F}_q^*$ par $w_s = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \lambda_s(t)u_t$. On pose de plus $w_0 := u_0$.

L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{u_0, u_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ des arêtes adjacentes à $\tilde{u}$ a pour base l'ensemble $\{w_0, w_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$. L'élément $\tilde{w}_s$ est défini par $\tilde{w}_s := \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \lambda_s(t)\tilde{u}_t$. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{\tilde{u}_0, \tilde{u}_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ des arêtes incidentes à u a pour base l'ensemble $\{\tilde{w}_0, \tilde{w}_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$.

Définition 1 *On note respectivement $\Phi_1 \in \mathbb{F}_q[X]$ et $\Phi_2 \in \mathbb{F}_q[X]$ la transformée de Fourier du polynôme $(1-X)^a$ et la transformée de Fourier inverse du polynôme $(1-X)^{q-1-a}$:*

$$\Phi_1 = \sum_{0\leq j\leq q-2} (1-\zeta^j)^a X^j, \quad \Phi_2 = \sum_{0\leq j\leq q-2} (1-\zeta^{-j})^{q-1-a} X^j.$$

Par définition, on les égalités suivantes dans $\mathbb{F}_q[X]$:

$$(1-X)^a = -\sum_{0\leq j\leq q-2} \Phi_1(\zeta^{q-1-j})X^j, \quad (1-X)^{q-1-a} = -\sum_{0\leq j\leq q-2} \Phi_2(\zeta^j)X^j. \tag{13}$$

Lemme 5 *L'action de T_1 dans les bases $\{\tilde{u}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ et $\{u, w_0, w_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ est donnée par*

$$\begin{array}{lcll} T_1(\tilde{u}) & = & w_0 + w_1, & \\ T_1(\tilde{w}_0) & = & u + w_{\zeta^a}, & \\ T_1(\tilde{w}_1) & = & -u + \Phi_1(1)w_{\zeta^a} & \textit{où } \Phi_1(1) = -1, \\ T_1(\tilde{w}_{\zeta^{q-1-a}}) & = & -(-1)^a w_0 + \Phi_1(\zeta^{q-1-a})w_1 & \textit{où } \Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a, \\ T_1(\tilde{w}_s) & = & \Phi_1(s)w_{s\zeta^a}, & \textit{pour tout } s \in \mathbb{F}_q^*\backslash\{1, \zeta^{q-1-a}\}. \end{array}$$

L'action de T_2 dans les bases $\{u, w_0, w_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ et $\{\tilde{u}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ est donnée par

$$\begin{array}{lcll} T_2(u) & = & \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1, & \\ T_2(w_0) & = & \tilde{u} + (-1)^{q-1-a}\tilde{w}_{\zeta^{q-1-a}}, & \\ T_2(w_1) & = & -\tilde{u} + \Phi_2(\zeta^{q-1-a})\tilde{w}_{\zeta^{q-1-a}} & \textit{où } \Phi_2(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^{q-1-a}, \\ T_2(w_{\zeta^a}) & = & -\tilde{w}_0 + \Phi_2(1)\tilde{w}_1 & \textit{où } \Phi_2(1) = -1, \\ T_2(w_s) & = & \Phi_2(s\zeta^{q-1-a})\tilde{w}_{s\zeta^{q-1-a}}, & \textit{pour tout } s \in \mathbb{F}_q^*\backslash\{1, \zeta^a\}. \end{array}$$

Démonstration. Nous effectuons la preuve pour l'action de T_1.

- La relation (9) dit que $T_1(\tilde{u}) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q} u_x$. Or $w_1 = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} u_x$. Donc, $T_1(\tilde{u}) = w_0 + w_1$.
- La relation (11) dit que $T_1(\tilde{u}_0) = u + \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} s^a u_s$. Donc $T_1(\tilde{u}_0) = u + w_{\zeta^a}$.
- Soit $s \in \mathbb{F}_q^*$ et $b \in \{0, .., q-2\}$ tel que $s = \zeta^b$. On a alors $\Phi_1(s) = \sum_{0\leq j\leq q-2} (1-\zeta^j)^a\zeta^{bj} = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (1-t)^a t^b$.

D'après (11) et la définition de $\tilde{w}_s$,

$$\begin{aligned}
T_1(\tilde{w}_s) &= \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b T_1(\tilde{u}_t) = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b[u + (-t)^a u_0 + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} (z-t)^a u_z] \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (-1)^a t^{a+b})u_0 + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} z^{a+b} u_z (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (1-tz^{-1})^a (tz^{-1})^b \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (-1)^a t^{a+b})u_0 + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} z^{a+b} u_z (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (1-t)^a t^b) \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (-1)^a t^{a+b})u_0 + \Phi_1(s) \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} z^{a+b} u_z \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (-1)^a t^{a+b})u_0 + \Phi_1(s) w_{s\zeta^a}
\end{aligned}$$

- Si $b \neq 0$ et $b \neq q-1-a$, c'est-à-dire si $s \neq 1$ et $s \neq \zeta^{q-1-a}$, les deux premiers termes sont nuls et l'on retrouve la formule annoncée dans le lemme.
- Si $b = 0$, c'est-à-dire $s = 1$, alors $b \neq q-1-a$ et le deuxième terme est nul tandis que le premier vaut $-u$. Pour retrouver la formule annoncée par le lemme, il reste à montrer que $\Phi_1(1) = -1$. D'après l'égalité (13), $-\Phi_1(1)$ est égal au terme constant du polynôme $(1-X)^a$. Ainsi, $\Phi_1(1) = -1$.
- Si $b = q-1-a$, c'est-à-dire $s = \zeta^{q-1-a}$, alors $b \neq 0$ et le premier terme est nul, tandis que le deuxième vaut $-(-1)^a u_0 = -(-1)^a w_0$. On retrouve la formule annoncée par le lemme car $\Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a$.

□

2.3.2 *Expression de $ind_I^G\chi$ comme limite inductive de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-modules.* On définit les arêtes exceptionnelles et les ensembles $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ comme au paragraphe 2.2.2. Soit $i \in \mathbb{N}$.

Lemme 6 *L'ensemble $\{T_1^j v, v \in V_{i-j}\}_{0\leq j\leq i}$ est une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base E_i. L'ensemble $\{T_2^j \tilde{v}, v \in V_{i-j}\}_{0\leq j\leq i}$ est une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\tilde{E}_i$.*

Démonstration. C'est l'analogue du lemme 1. Il se démontre de même car l'élément de T_1 se comporte "géométriquement" comme l'élément ST de la section 2.2, tandis que l'élément T_2 se comporte comme $T(ST)$. □

On déduit de ce lemme que $ind_I^G\chi$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base

$$\{T_1^k v,\ T_2^k \tilde{v},\ v \in V_i\}_{i,k\in\mathbb{N}}. \tag{14}$$

On définit la famille $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $ind_I^G\chi$, croissante pour l'inclusion, en désignant par Z_i le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base

$$\{T_1^k v,\ T_2^k \tilde{v},\ v \in V_j\}_{0\leq j\leq i,\, k\in\mathbb{N}}.$$

Remarque 5 *D'après le lemme 6, l'ensemble des arêtes (sortantes et rentrantes) à distance inférieure à $i+1$ est inclus dans Z_i.*

Proposition 4 *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-vectoriel Z_i est stable sous l'action de H_χ.*

Corollaire 4 *Le H_χ-module Z_i est engendré par l'ensemble $\bigcup_{j=0,..,i} V_j \cup \tilde{V}_j$.*

Preuve de la proposition 4. Puisque les générateurs T_1 et T_2 de l'algèbre commutative H_χ vérifient $T_1T_2 = 0$, il suffit, pour montrer que Z_i est stable sous l'action de H_χ, de montrer que

$$T_1\tilde{v} \in Z_i,\ T_2 v \in Z_i, \quad \text{pour tout } v \in V_j,\ 0 \leq j \leq i.$$

– Pour $i=0$. Soit $v \in V_0$, alors, d'après $\mathbf{G_2^\chi}$ et $\mathbf{G_1^\chi}$, $T_2 v$ (resp. $T_1\tilde{v}$) est une combinaison linéaire de q arêtes rentrantes (resp. sortantes) à distance 1. Ces arêtes appartiennent à $\tilde{V}_0$ (resp. V_0). Donc, $T_2 v$ et $T_1\tilde{v}$ appartiennent à Z_0.
– Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que Z_i est stable sous l'action de H_χ.
  Soit $v \in V_j$, $j \leq i$. Alors $T_1\tilde{v}, T_2 v \in Z_i$ par hypothèse de récurrence, donc $T_1\tilde{v}, T_2 v \in Z_{i+1}$.
  Soit $v \in V_{i+1}$. Alors d'après $\mathbf{G_2^\chi}$, $T_2 v$ est une combinaison linéaire d'une arête sortante à distance $i+1$ et de $q-1$ arêtes rentrantes à distance $i+2$. D'après la remarque 5, chacune de ces arêtes appartient à Z_{i+1}, donc $T_2 v \in Z_{i+1}$. De la même façon, $T_1\tilde{v} \in Z_{i+1}$.
  Ainsi, Z_{i+1} est stable sous l'action de H_χ.

□

Remarque 6 *On déduit de la proposition et de la remarque 5 que le H_χ-module Z_i ne dépend pas du choix des arêtes exceptionnelles. De plus, il est stable sous l'action de $I(1)$.*

Nous avons démontré que $ind_I^G\chi$ est la limite inductive du système H_χ-modules $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où les flèches du système inductif sont données par les inclusions. Nous allons voir que les H_χ-modules Z_i ont été bien construits de façon à ce que leurs propriétés dépendent entièrement de Z_0. Réinitialisons tout d'abord le système inductif au rang -1 en choisissant pour Z_{-1} le H_χ-module engendré par u et $\tilde{u}$.

Remarque 7 i) *D'après les relations (9) et (10), l'espace vectoriel de base $\{T_1^k u_s,\, T_2^k\tilde{u}_s,\, s \in \mathbb{F}_q^*\}$ est un supplémentaire de Z_{-1} dans Z_0.*

ii) *D'après la remarque 1, le H_χ-module Z_{-1} est librement engendré par u et $\tilde{u}$. De plus, il est égal à l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$.*

Lemme 7 *Soit $i \in \mathbb{N}$.*
– *Soit v une arête sortante à distance $i+1$. Les images dans le quotient Z_{i+1}/Z_i des q arêtes adjacentes à v et de leurs opposées engendrent un sous-module de Z_{i+1}/Z_i isomorphe à Z_0/Z_{-1}.*
– *Le H_χ-module Z_{i+1}/Z_i est la somme directe de ces sous-modules, pour v parcourant l'ensemble des arêtes sortantes à distance $i+1$.*

Démonstration. Une arête v sortante à distance $i+1$ s'écrit de façon unique $v = g\tilde{u}$ où g est un élément du système de représentants (1) des classes à gauche de G modulo I. L'action par translation par g sur les arêtes de l'arbre envoie le faisceau issu de $\tilde{u}$ sur le faisceau issu de v. Par conséquent, on a un morphisme de H_χ-modules bien défini par

$$\begin{array}{cccc} F_v : & Z_0/Z_{-1} & \longrightarrow & Z_{i+1}/Z_i \\ & z \mod Z_{-1} & \longmapsto & gz \mod Z_i. \end{array}$$

L'image de ce morphisme n'est autre que le sous-module de Z_{i+1}/Z_i engendré par les arêtes adjacentes à v et par leurs opposées. D'après la remarque 7-i) et par définition de Z_{i+1}, une base de Z_0/Z_{-1} est envoyée sur une famille libre de Z_{i+1}/Z_i. Ainsi, F_v est injectif et l'on a démontré la première assertion du lemme. La définition de Z_{i+1} nous assure aussi que Z_{i+1}/Z_i est la somme directe des images des morphismes F_v où v parcourt l'ensemble des arêtes sortantes à distance $i+1$. C'est la deuxième assertion du lemme.

□

2.3.3 *Considérations d'algèbre générale.* Soient K un corps commutatif et $K[x,\tilde{x}]$ la K-algèbre commutative de générateurs x et $\tilde{x}$ avec la relation $x\tilde{x}=0$. Elle contient les K-algèbres $K[x]$ et $K[\tilde{x}]$ des polynômes en les indéterminées x et $\tilde{x}$.

2.3.3.1 Condition nécessaire de platitude pour un $K[x,\tilde{x}]$-module. La suite de $K[x,\tilde{x}]$-modules

$$0 \to xK[x,\tilde{x}] \to K[x,\tilde{x}] \to \tilde{x}K[x,\tilde{x}] \to 0$$

est exacte. Soit Z un $K[x,\tilde{x}]$-module plat. Le produit tensoriel par Z donne la suite exacte de $K[x,\tilde{x}]$-modules

$$0 \to xZ \to Z \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{x}Z \to 0. \tag{15}$$

2.3.3.2 Condition suffisante de platitude. Commençons par décrire la structure des $K[x,\tilde{x}]$-modules avec lesquels nous allons travailler. Soit W un $K[x]$-module libre de rang fini $n \geq 1$ de base V et $\tilde{W}$ un $K[\tilde{x}]$-module libre de même rang fini n de base $\tilde{V}$. On désigne par $\langle V\rangle$ (resp. $\langle\tilde{V}\rangle$) le K-espace vectoriel de base V (resp. $\tilde{V}$) et l'on se donne deux applications K-linéaires $f_x : \langle\tilde{V}\rangle \to \langle V\rangle$ et $f_{\tilde{x}} : \langle V\rangle \to \langle\tilde{V}\rangle$ vérifiant $f_x \circ f_{\tilde{x}} = 0$, $f_{\tilde{x}} \circ f_x = 0$. On peut alors définir une structure de $K[x,\tilde{x}]$-module sur le K-espace vectoriel

$$Z \;=\; W \,\oplus\, \tilde{W} \;=\; \langle V\rangle \,\oplus\, x\,W \,\oplus\, \langle\tilde{V}\rangle \,\oplus\, \tilde{x}\,\tilde{W} \tag{16}$$

comme suit : pour tous $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$, $w \in W$, $\tilde{w} \in \tilde{W}$,

$$x.(v, xw, \tilde{v}, \tilde{x}\tilde{w}) := (f_x(\tilde{v}), xv + x^2 w, 0, 0), \quad \tilde{x}.(v, xw, \tilde{v}, \tilde{x}\tilde{w}) := (0, 0, f_{\tilde{x}}(v), \tilde{x}\tilde{v} + \tilde{x}^2\tilde{w}).$$

Elle est compatible avec la structure de $K[x]$-module de W et la structure de $K[\tilde{x}]$-module de $\tilde{W}$.

Lemme 8 *La suite (15) est exacte si et seulement si $Ker(f_{\tilde{x}}) = Im(f_x)$.*

Démonstration. Supposons que la suite (15) est exacte. Puisque l'intersection des sous-espaces xZ et $\langle V\rangle$ de Z n'est autre que $Im(f_x)$, on a bien $Ker(f_{\tilde{x}}) = Im(f_x)$.
Supposons que $Ker(f_{\tilde{x}}) = Im(f_x)$. Soit $z \in Z$ que l'on écrit $z = (v, xw, \tilde{v}, \tilde{x}\tilde{w})$ selon la décomposition (16). On a $\tilde{x}z = (0, 0, f_{\tilde{x}}(v), \tilde{x}\tilde{v} + \tilde{x}^2\tilde{w})$. Si $\tilde{x}z = 0$, on en déduit d'une part que v appartient à $Ker(f_{\tilde{x}})$ donc il existe $\tilde{v}' \in \langle\tilde{V}\rangle$ tel que $v = f_x(\tilde{v}')$. D'autre part, on a $\tilde{x}\tilde{v} + \tilde{x}^2\tilde{w} = 0$ dans le $K[\tilde{x}]$-module sans torsion $\tilde{W}$. Ainsi $\tilde{v} = \tilde{w} = 0$. D'où $z = (f_x(\tilde{v}'), xw, 0, 0) \in xZ$ et la suite (15) est exacte. □

Proposition 5 *Le $K[x,\tilde{x}]$-module Z est plat si et seulement si la suite (15) est exacte. Dans ce cas c'est même un $K[x,\tilde{x}]$-module libre de rang n.*

Démonstration. Nous construisons un $K[x]$-module W_{f_x} associé à la donnée de W et de f_x de la façon suivante. On pose $U = \langle\tilde{V}\rangle/Ker(f_x)$ et l'on considère f_x comme une application injective $f_x : U \to W$. On définit le $K[x]$-module $W_{f_x} = U \oplus W$ par $x.(u, w) := (0, f_x(u) + xw)$. Puisque l'image de f_x est d'intersection nulle avec xW, on vérifie aisément que W_{f_x} est un $K[x]$-module sans torsion et puisque $K[x]$ est un anneau principal, c'est un $K[x]$-module libre. De plus, puisque le quotient de W_{f_x} par W est de torsion, W_{f_x} un $K[x]$-module libre de même rang n. Remarquons que

$$W_{f_x}/xW_{f_x} = \langle\tilde{V}\rangle/Ker(f_x) \oplus \langle V\rangle/Im(f_x).$$

On construit de même le $K[\tilde{x}]$-module $\tilde{W}_{f_{\tilde{x}}}$ libre de rang n associé à la donnée de $\tilde{W}$ et de $f_{\tilde{x}}$. Il vérifie

$$\tilde{W}_{f_{\tilde{x}}}/\tilde{x}\tilde{W}_{f_{\tilde{x}}} = \langle V\rangle/Ker(f_{\tilde{x}}) \oplus \langle\tilde{V}\rangle/Im(f_{\tilde{x}}).$$

Supposons maintenant que la suite (15) est exacte, autrement dit que $Ker(f_x) = Im(f_{\tilde{x}})$. Alors, on dispose d'un $K[x]$-module libre W_{f_x}, d'un $K[\tilde{x}]$-module libre $\tilde{W}_{f_{\tilde{x}}}$ avec un isomorphisme linéaire

$$W_{f_x}/xW_{f_x} \simeq \tilde{W}_{f_{\tilde{x}}}/\tilde{x}W_{f_{\tilde{x}}}.$$

On construit dès lors le produit fibré de W_{f_x} et $\tilde{W}_{f_{\tilde{x}}}$ relativement aux projections $W_{f_x} \twoheadrightarrow W_{f_x}/xW_{f_x}$ et $\tilde{W}_{f_{\tilde{x}}} \twoheadrightarrow \tilde{W}_{f_{\tilde{x}}}/\tilde{x}W_{f_{\tilde{x}}}$. Il est naturellement muni d'une structure de $K[x,\tilde{x}]$-module libre de rang n isomorphe au $K[x,\tilde{x}]$-module Z. Ainsi, Z est un $K[x,\tilde{x}]$-module libre de rang n.

□

2.3.3.3 Exemple. La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre H_χ est commutative de générateurs T_1 et T_2 avec la relation $T_1T_2 = 0$. Le H_χ-module Z_0 rentre dans le cadre que nous avons décrit au paragraphe précédent. En effet il est la somme directe du $\overline{\mathbb{F}}_p[T_1]$-module libre de base V_0 et du $\overline{\mathbb{F}}_p[T_2]$-module libre de base $\tilde{V}_0$. De plus, d'après $\mathbf{G_1^\chi}$ et $\mathbf{G_2^\chi}$, l'action de T_1 (resp. T_2) induit une application linéaire de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$ (resp. V_0) à valeurs dans l'espace vectoriel de base V_0 (resp. $\tilde{V}_0$).

2.3.4 *Critère de platitude pour le H_χ-module Z_0.*

Proposition 6 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le H_χ-module Z_0 est plat.*

ii) *Le H_χ-module Z_0 est libre de rang $q+1$.*

iii) *On a la suite exacte de H_χ-modules*

$$0 \longrightarrow T_1Z_0 \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{T_2} T_2Z_0 \longrightarrow 0. \tag{17}$$

iv) *Les cœfficients des polynômes $(1-X)^a$, $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$ de degrés respectifs a et $q-1-a$ sont tous non nuls.*

Preuve de la proposition. Notons $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) l'application linéaire induite par l'action de T_1 (resp. T_2) de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$ (resp. V_0) dans l'espace vectoriel de base V_0 (resp. $\tilde{V}_0$). L'équivalence entre les assertions i), ii) et iii) est donnée par la proposition 5. Le lemme 8 nous dit par ailleurs que l'assertion iii) est équivalente à l'égalité des espaces vectoriels $Im\mathcal{T}_1$ et $Ker\mathcal{T}_2$. Nous allons montrer, par le calcul explicite des rangs des applications $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, que cette égalité est vraie si et seulement si l'assertion iv) est vérifiée. Nous avons défini par analyse de Fourier de nouvelles bases $\{w, w_0, w_s, s \in \mathbb{F}_q^*\}$ et $\{\tilde{w}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_s, s \in \mathbb{F}_q^*\}$ de l'espace vectoriel de base V_0 et de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$, dans lesquelles les actions respectives de T_2 et T_1 s'expriment simplement et sont données par le lemme 5. On y lit que

$$\begin{aligned} rang(\mathcal{T}_1) &= 2 + |\{s \in \mathbb{F}_q^* - \{1, \zeta^{q-1-a}\}\ \Phi_1(s) \neq 0\}|, \\ rang(\mathcal{T}_2) &= 2 + |\{s \in \mathbb{F}_q^* - \{1, \zeta^{a}\}\ \Phi_2(s\zeta^{q-1-a}) \neq 0\}|. \end{aligned}$$

Les formules (13) montrent que $\Phi_1(1) = -1$, $\Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a$, $\Phi_2(1) = -1$, et $\Phi_2(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^{q-1-a}$, dont on déduit que

$$rang(\mathcal{T}_1) = |\{s \in \mathbb{F}_q^*\ \Phi_1(s) \neq 0\}|, \qquad rang(\mathcal{T}_2) = |\{s \in \mathbb{F}_q^*\ \Phi_2(s) \neq 0\}|.$$

Puisque $T_2T_1 = 0$, on a $Im\mathcal{T}_1 = Ker\mathcal{T}_2$ si et seulement si la somme des rangs de $\mathcal{T}_1$ et de $\mathcal{T}_2$ est égale au cardinal $q+1$ de V_0. Notant r_1 (resp. r_2) le nombre de racines de Φ_1 (resp. Φ_2) dans $\mathbb{F}_q^*$, cette condition est équivalente à $q-1-r_1+q-1-r_2 = q+1$, ou encore $r_1 + r_2 = q-3$. Par comparaison des degrés des polynômes, les relations (13) permettent de voir que $\Phi_1(\zeta^j) = 0$ dès que $j \in \{1, ..., q-2-a\}$ et $\Phi_2(\zeta^j) = 0$ dès que $j \in \{q-a, ..., q-2\}$. On recense ainsi $q-a-2$ racines pour Φ_1 et $a-1$ racines pour Φ_2. Or, $(q-a-2)+(a-1) = q-3$. Ainsi, $Im\mathcal{T}_1 = Ker\mathcal{T}_2$ si et seulement si Φ_1 et Φ_2 n'ont pas d'autre racine c'est-à-dire si les cœfficients du polynôme $(1-X)^a \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$ de degré a sont tous non nuls, et les cœfficients du polynôme $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$ de degré $q-1-a$ sont tous non nuls. C'est la dernière assertion.

□

On se place dans le cas où le H_χ-module Z_0 est libre. Nous allons en donner une base explicite. D'après ce qui précède et la preuve du corollaire 3, le corps résiduel de F est égal à $\mathbb{F}_p$. Définissons le sous-ensemble J de $\mathbb{F}_p^*$ de cardinal $p-1-a$:

$$J := \{\zeta^{a+1}, \zeta^{a+2}, ..., \zeta^{p-1}\}.$$

Le complémentaire de $\zeta^{-a}J$ dans $\mathbb{F}_p^*$ est l'ensemble $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J) = \{\zeta^{p-a}, \zeta^{p-a+1}, ..., \zeta^{p-1}\}$. Les formules (13) et le lemme 5 donnent :

Lemme 9 – *Soit $s \in \mathbb{F}_p^*$. Si $s \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$ alors $\Phi_1(s) \neq 0$; si $s \in \zeta^{-a}J$ alors $\Phi_2(s) \neq 0$.*
– *Pour tout $s \in \mathbb{F}_p^*$ n'appartenant pas à J, l'élément $s' = \zeta^{-a}s$ appartient à $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$ et*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} w_{\zeta^a} & = & -u+ & (\Phi_1(1))^{-1}T_1(\tilde{w}_1) \text{ où } \Phi_1(1) = -1 \\ w_s & = & & (\Phi_1(s'))^{-1}T_1(\tilde{w}_{s'}) \text{ si } s \neq \zeta^a. \end{array} \right. \tag{18}$$

– *Pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^*$ appartenant à $(\zeta^{-a}J)$, l'élément $s = \zeta^a s'$ appartient à J et*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \tilde{w}_{\zeta^{-a}} & = & -(-1)^a\tilde{u}+ & (\Phi_2(\zeta^{-a}))^{-1}T_2(w_1) \text{ où } \Phi_2(\zeta^{-a}) = -(-1)^a \\ \tilde{w}_{s'} & = & & (\Phi_2(s'))^{-1}T_2(w_s) \text{ si } s' \neq \zeta^{-a}. \end{array} \right. \tag{19}$$

Le H_χ-module Z_0 est engendré par l'ensemble $\{u,\ \tilde{u},\ u_s,\ \tilde{u}_s,\ s \in \mathbb{F}_p^*\}$. Par conséquent, l'ensemble $\{u,\ \tilde{u},\ w_s,\ \tilde{w}_s, s \in \mathbb{F}_p^*\}$ forme un système générateur de Z_0 et le lemme précédent nous dit que cela reste vrai en éliminant $\{w_s, s \in \mathbb{F}_p^* - J,\ \tilde{w}_{s'},\ s' \in \zeta^{-a}J\}$. On dispose donc d'un système générateur de cardinal $p+1$ pour le H_χ-module Z_0 libre de rang $p+1$. Puisque l'anneau H_χ est le produit fibré des anneaux (principaux) de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[T_1]$ et $\overline{\mathbb{F}}_p[T_2]$, ce système générateur est également une base :

Proposition 7 *Le H_χ-module Z_0 est la somme directe de Z_{-1} et du H_χ-module libre de base*

$$\{w_s,\ \tilde{w}_{s'},\ s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}.$$

En particulier, il apparaît que le H_χ-module libre Z_{-1} est un facteur direct de Z_0. Puisque le H_χ-module quotient Z_{i+1}/Z_i est isomorphe à une somme de copies de Z_0/Z_{-1} (lemme 7), on a :

Corollaire 5 *Si Z_0 est un H_χ-module plat, alors Z_i est plat et même libre pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

2.3.5 *Critère de platitude pour $ind_I^G\chi$.*

Proposition 8 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *Le H_χ-module $ind_I^G\chi$ est plat.*
ii) *Le H_χ-module $ind_I^G\chi$ est libre.*
iii) *La suite de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow T_1 ind_I^G\chi \longrightarrow ind_I^G\chi \xrightarrow{T_2} T_2 ind_I^G\chi \longrightarrow 0. \tag{20}$$

iv) *Le H_χ-module Z_0 est plat.*

Preuve de la proposition. Supposons que Z_0 est plat. D'après le corollaire 5, chaque H_χ-module Z_i est plat et même libre. Donc, comme limite inductive filtrante de H_χ-modules libres, $ind_I^G\chi$ est libre. Ainsi iv) implique ii) qui implique i). Le fait que i) implique iii) est donné par le paragraphe 2.3.3.1. Montrons que iii) implique iv). Supposons que la suite (20) est exacte. Il suffit, pour montrer que Z_0 est plat, de montrer que la suite

$$0 \longrightarrow T_1 Z_0 \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{T_2} T_2 Z_0 \longrightarrow 0, \tag{21}$$

est exacte ou encore, d'après le lemme 8, que toute combinaison linéaire de V_0 annulée par T_2 est l'image par T_1 d'une combinaison linéaire des éléments $\tilde{V}_0$. Ceci est une conséquence immédiate du fait que la suite (20) est exacte et que l'intersection de $T_1 ind_I^G \chi$ avec l'espace vectoriel de base l'ensemble V_0 des arêtes sortantes à distance 1 est égale à l'image par T_1 de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$.

$\square$

Références

BL94 Barthel, L. ; Livné, R. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. 75, no. 2, 261-292 (1994).

BO03 Bellaïche, J. ; Otwinowska, A. Platitude du module universel pour GL_3 en caractéristique non banale. Bull. Soc. Math. France 131, no. 4, 507–525 (2003).

Bou61 Bourbaki, N. Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative. Chapitre 1 : Modules plats. Chapitre 2 : Localisation. Herman, Paris (1961).

Bre03 Breuil, C. Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compositio Math. 138, no. 2, 165–188 (2003).

Laz99 Lazarus, X. Module universel en caractéristique $l > 0$ associé à un caractère de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique, avec $l \neq p$. J. Algebra 213, no. 2, 662–686. (1999).

Ser77 Serre, J.-P. Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, (1977).

Vig04 Vignéras, M.-F. Representations modulo p of the p-adic group $\mathrm{GL}(2, F)$. Compos. Math. 140, no. 2, 333–358 (2004).

Rachel Ollivier