LE FONCTEUR DES INVARIANTS SOUS L'ACTION DU PRO-p-IWAHORI DE $\mathrm{GL}_2(F)$

Rachel Ollivier

Résumé. — Soit F un corps p-adique d'uniformisante π. Le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori associe à une représentation lisse modulo p de $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi$ un module à droite en caractéristique p sur la pro-p-algèbre de Hecke de G. Nous étudions les propriétés de ce foncteur selon la nature du corps F. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, il fournit une équivalence de catégories entre les représentations lisses de G engendrées par leurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori d'une part, et les modules à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke d'autre part. Nous donnons des exemples de corps F pour lesquels ce résultat est faux.

Abstract. — Let F be a p-adic field with uniformizer π. Given a smooth mod p-representation of $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi$, we consider its subspace of invariants under the action of the pro-p-Iwahori subgroup and get this way a functor taking values in the category of right modules over the pro-p-Hecke algebra with characteristic p. We show that if $F = \mathbb{Q}_p$, this functor restricted to the representations generated by their pro-p-invariants is an equivalence of categories, and give examples of other p-adic fields for which it is not the case.

1. Introduction

Soit p un nombre premier, F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p d'anneau d'entiers noté $\mathscr{O}$. On en fixe une uniformisante π. En 1994, L.Barthel et R.Livné ([**1**], [**2**]) ont classifié les représentations irréductibles de $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi$ qui sont des sous-quotients d'induites paraboliques et montré qu'il existe des représentations irréductibles supercuspidales, qu'ils n'ont pas classifiées et qu'ils ont appelées *supersingulières.* En 2001, C.Breuil a classifié ces représentations supersingulières dans le cas particulier où $F = \mathbb{Q}_p$ ([**3**]).

Le cadre de la caractéristique p fait jouer un rôle particulier à l'unique pro-p-Sylow $I(1)$ du sous-groupe d'Iwahori standard de G : on dispose du foncteur *des* $I(1)$*-invariants* noté $\mathscr{H}^{(1)}$, de la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de G dans la catégorie des modules à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$. Dès que la représentation est non nulle, son espace des $I(1)$-invariants est non nul. Inversement, il existe un foncteur naturel noté $\mathscr{T}^{(1)}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite dans la catégorie des représentations lisses de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants qui consiste à associer à un module M la représentation $M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ obtenue par produit tensoriel avec le pro-p-module universel. Il est donc naturel d'approcher l'étude des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G *via* celle des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite et celle des propriétés des foncteurs $\mathscr{H}^{(1)}$ et $\mathscr{T}^{(1)}$.

En 2001, M.-F. Vignéras a classifié les modules simples sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de G ([**9**]). Parmi ces modules, elle a identifé ceux qui proviennent, *via* le foncteur des $I(1)$-invariants, de sous-quotients irréductibles d'induites paraboliques. Il convenait alors d'appeler les autres des *modules supersinguliers.* Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, le foncteur des $I(1)$-invariants met en correspondance bijective les

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 20C08, 20G05, 22E50.
Mots clefs. — mod p-representations, pro-p-Iwahori Hecke algebra.

$\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de G avec les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples. Cette correspondance associe les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations supersingulières classifiées par C.Breuil avec les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples supersinguliers. En 2003, pour F un corps p-adique quelconque, V.Paskunas a associé à chaque $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module simple supersingulier une représentation supersingulière de G dont l'espace des $I(1)$-invariants a pour socle ce module simple supersingulier ([**6**]).

L'objet de cet article est d'explorer les propriétés des foncteurs $\mathscr{H}^{(1)}$ et $\mathscr{T}^{(1)}$. Le foncteur $\mathscr{T}^{(1)}$ est exact si et seulement si le corps résiduel de F est de cardinal premier, égal à p ([**4**]). On note q le cardinal du corps résiduel de F. Nous démontrons ici le résultat suivant,

Théorème. — a) *Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$. Les foncteurs $\mathscr{T}^{(1)}$ et $\mathscr{H}^{(1)}$ fournissent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite et la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants.*
b) *Ce n'est pas le cas si $q > p$ ou bien si $F = \mathbb{F}_p((T))$ avec $p \neq 2$.*

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, la première assertion du théorème permet en particulier de retrouver le résultat de C.Breuil de classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de G. Elle montre de plus que la bijection entre ces représentations irréductibles et les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples classifiés par M.-F.Vignéras provient d'une équivalence de catégories.

1.1. Algèbres de Hecke et modules universels. —

1.1.1. — Toutes les représentations considérées sont lisses : les stabilisateurs des points sont ouverts. Soit R un anneau commutatif unitaire d'unité 1_R. On appelle caractère une représentation de dimension 1. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et $\sigma : K \to \mathrm{GL}(V)$ une R-représentation de K de type fini sur R. On note $ind_K^G \sigma$ l'induite compacte de σ. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, \sigma)$ est l'algèbre des entrelacements

$$\mathcal{H}_R(G, \sigma) = End_{R[G]}(ind_K^G\, \sigma).$$

On suppose que $\sigma : K \to R^*$ est un caractère. Un base de l'induite compacte du caractère σ est l'ensemble $\{f_{Kg,\sigma},\ g \in K\backslash G\}$ où l'on note $f_{Kg,\,\sigma}$ l'élément de $ind_K^G\sigma$ de support Kg et de valeur 1_R en g. L'algèbre de Hecke de σ s'identifie avec la composante (K, σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ munie du produit de convolution décrit par [**9**] A.1.

On suppose que $\sigma = 1$ est le caractère trivial de K. On note alors $\mathcal{H}_R(G, K)$ son algèbre de Hecke. L'induite compacte $ind_K^G 1$ s'identifie avec le $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$ des fonctions à valeurs dans R et à support fini dans l'ensemble des classes à droites de G modulo K. On notera $\mathbf{1}_K$ l'élément générateur $f_{K,1}$ égal à la fonction caractéristique de K. Le module universel $R[K\backslash G]$ est naturellement un $\mathcal{H}_R(G, K)$-module à gauche.

Si (ρ, V) est une R-représentation de G, son espace des K-invariants est un $\mathcal{H}_R(G, K)$-module à droite.

1.1.2. — Le $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$ définit les deux foncteurs $\mathscr{T}$ et $\mathscr{H}$ suivants :
- le foncteur $\mathscr{T}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_R(G, K)$-modules à droite dans la catégorie des R-représentations de G engendrées par leurs K-invariants :

$$M \longmapsto M \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G],$$

- le foncteur $\mathscr{H}$ dit *des K-invariants* de la catégorie des R-représentations de G engendrées par leurs K-invariants dans la catégorie des $\mathcal{H}_R(G, K)$-modules à droite :

$$V \longmapsto Hom_{R[G]}(R[K\backslash G], V) \simeq V^K.$$

Le foncteur $\mathscr{T}$ est adjoint à gauche de $\mathscr{H}$.

Soit M un $\mathcal{H}_R(G, K)$-module à droite et V une R-représentation de G engendrée par ses K-invariants. On a un morphisme de $\mathcal{H}_R(G, K)$-modules à droite

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & (M \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G])^K \simeq \mathscr{H} \circ \mathscr{T}(M) \\ m & \longmapsto & m \otimes \mathbf{1}_K. \end{array}$$

Si l'espace des K-invariants de $R[K\backslash G]$ en est un facteur direct comme $\mathcal{H}_R(G,K)$-module, alors l'application (1) est injective.

On a un morphisme surjectif G-équivariant

$$\mathscr{T}\circ\mathscr{H}(V)\simeq V^K\otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G]\to V \tag{2}$$

défini par $v\otimes\mathbf{1}_K\mapsto v$ pour tout $v\in V^K$.

1.1.3. — Soient $K=\mathrm{GL}_2(\mathscr{O})$ et $I\subset K$ le sous-groupe d'Iwahori standard : c'est l'image inverse par la réduction modulo π du sous-groupe de Borel B de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ des matrices triangulaires supérieures. On désigne par $I(1)$ l'unique pro-p-Sylow de I. On identifie les sous-groupes K, I et $I(1)$ de $\mathrm{GL}_2(F)$ avec leurs images respectives dans $G=\mathrm{GL}_2(F)/\pi$. Les sous-groupes ouverts et compacts I et $I(1)$ sont normalisés par l'élément

$$\varpi=\begin{pmatrix}0&1\\ \pi&0\end{pmatrix}.$$

Toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non nulle de G admet un vecteur non nul invariant par le pro-p-groupe $I(1)$ ([**1**] lemme 3). Tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I est trivial sur $I(1)$ et s'identifie avec un caractère du tore fini $T(\mathbb{F}_q)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q^*$.

Notation 1. — On note $I(1)^+$ (*resp.* $I(1)^-$) l'intersection de $I(1)$ avec le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures). On a la décomposition d'Iwahori standard pour $I(1)$: tout élément de $I(1)$ s'écrit comme un produit d'un élément de $I(1)^+$, d'un élément diagonal de $I(1)$ et d'un élément de $I(1)^-$. On note $I(1)^\pm$ le sous-groupe de $I(1)$ engendré par $I(1)^+$ et $I(1)^-$.

1.1.4. Les propriétés du foncteur des $I(1)$-invariants sont encore énigmatiques. On dispose toutefois du critère d'irréductibilité suivant ([**9**] 4.3) :

***Proposition 1.1* (Critère d'irréductibilité).** — *Soit (ρ,V) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non nulle de G engendrée par son espace $V^{I(1)}$ des $I(1)$-invariants. Si le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module à droite $V^{I(1)}$ est irréductible, alors la représentation (ρ,V) est irréductible.*

1.2. Résultat principal. — Nous allons noter $\mathscr{T}^{(1)}$ et $\mathscr{H}^{(1)}$ (*resp.* $\mathscr{T}$ et $\mathscr{H}$) les foncteurs définis au paragraphe 1.1.2 par le $\overline{\mathbb{F}}_p$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ (*resp.* $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$) relatif au pro-$p$-Iwahori (*resp.* à l'Iwahori).

Proposition 1.2. — *Supposons que le corps résiduel de F est de cardinal p. Pour tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module à droite M, le morphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-modules à droite*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathscr{H}^{(1)}\circ\mathscr{T}^{(1)}(M)\\ m & \longmapsto & m\otimes\mathbf{1}_{I(1)}\end{array} \tag{3}$$

est injectif. S'il est de plus surjectif pour tout M, alors les foncteurs $\mathscr{T}^{(1)}$ et $\mathscr{H}^{(1)}$ sont des équivalences de catégories.

Démonstration. — L'injectivité de (3) est assurée par [**4**] 2.1.3. Les foncteurs $\mathscr{T}^{(1)}$ et $\mathscr{H}^{(1)}$ étant adjoints l'un de l'autre, ils constituent des équivalences de catégories si et seulement si $\mathscr{H}^{(1)}\circ\mathscr{T}^{(1)}\simeq id$ et $\mathscr{T}^{(1)}\circ\mathscr{H}^{(1)}\simeq id$. Sous l'hypothèse de la proposition, le premier isomorphisme est vérifié. Soit V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation engendrée par ses $I(1)$-invariants. On a défini au paragraphe 1.1.2 un morphisme surjectif G

$$\mathscr{T}^{(1)}\circ\mathscr{H}^{(1)}(V)\longrightarrow V. \tag{4}$$

L'hypothèse de la proposition appliquée au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module à droite $\mathscr{H}^{(1)}(V)$ dit que l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathscr{T}^{(1)}\circ\mathscr{H}^{(1)}(V)$ est égal à l'ensemble $\{v\otimes\mathbf{1}_K,\ v\in V^{I(1)}\}$. La restriction à cet espace du morphisme (4) est injective. Puisque toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse non nulle de G admet un vecteur $I(1)$-invariant non trivial, on en déduit que (4) est injectif.

□

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.3. — a) *Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$. Les foncteurs $\mathscr{T}^{(1)}$ et $\mathscr{H}^{(1)}$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite et la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants.*

b) *Supposons que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :*
- *$p \neq 2$ et $F = \mathbb{F}_p((T))$.*
- *$q > p$.*

Il existe un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite simple supersingulier $\mathfrak{M}^{(1)}$ tel que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $\mathscr{H}^{(1)} \circ \mathscr{T}^{(1)}(\mathfrak{M}^{(1)})$ est de dimension infinie.

Sous les hypothèses b), les foncteurs $\mathscr{T}^{(1)}$ et $\mathscr{H}^{(1)}$ ne sont pas des équivalences de catégories. En effet, un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module simple supersingulier est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension finie, égale à 2 ([**9**]).

1.3. L'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{F})$. —

1.3.1. — On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{F})$. On se réfère à [**8**]. Nous adoptons les conventions et notations de [**4**]. L'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ s'identifie avec l'ensemble des réseaux de F^2 à homothétie près et l'on en fixe l'origine en le sommet c_0 correspondant au réseau $\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}$. Cet ensemble est muni d'une action transitive de G et s'identifie avec l'ensemble des classes à gauche G/K. L'ensemble des sommets de l'arbre est naturellement muni d'une distance d. Nous considérons les arêtes de $\mathcal{T}$ comme orientées. L'action de G sur l'ensemble des sommets induit une action transitive sur l'ensemble des arêtes. On note u l'arête d'origine c_0 et d'extrémité ϖc_0. Son stabilisateur est égal au sous-groupe d'Iwahori I et l'ensemble des arêtes de l'arbre s'identifie avec les classes à gauche G/I.
Soit v une arête. On désigne par $\tilde{v}$ l'arête opposée à v. Toute arête d'origine l'extrémité de v, distincte de $\tilde{v}$, sera dite *adjacente* à v. On appelle *faisceau* issu de v l'ensemble des q arêtes adjacentes à v. L'action de G sur l'ensemble des arêtes transforme un faisceau en un faisceau.

1.3.2. — On note $[\,.\,] : \mathbb{F}_q \to \mathscr{O}$ l'application de Teichmüller et l'on identifie $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ avec $\mathscr{O}$ *via*

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathscr{O} \\ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \pi^j [x_j]. \end{array}$$

Pour tout $i \geq 1$, on plonge $\mathbb{F}_q^i$ dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ en identifiant $(x_0, ..., x_{i-1}) \in \mathbb{F}_q^i$ avec l'élément $(x_0, ..., x_{i-1}, 0, 0, ...)$ de $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$. L'image de $\mathbb{F}_q^i$ par a est un système de représentants de $\mathscr{O}/\pi^i\mathscr{O}$.

Lorsque $F = \mathbb{F}_q((T))$, l'identification a est un morphisme additif de $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$, muni de l'addition coordonnée à coordonnée, dans $\mathscr{O} = \mathbb{F}_q[[T]]$. Lorsque F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, l'anneau des entiers de F s'identifie avec l'anneau des vecteurs de Witt à cœfficients dans $\mathbb{F}_q$. On note $Q \in \mathbb{F}_q[X, Y]$ la réduction modulo p du polynôme à cœfficients entiers

$$\frac{X^p + Y^p - (X+Y)^p}{p}.$$

Lemme 1.4. — *On suppose que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Soient $i \geq 1$, $x = (x_0, ..., x_i) \in \mathbb{F}_q^{i+1}$ et $s \in \mathbb{F}_q$. On a*

$$p^{i-1}[s] + a(x_0, .., x_{i-1}, x_i) = a(x_0, .., s + x_{i-1}, x_i + Q(s^{1/p}, x_{i-1}^{1/p})) \mod p^{i+1}\mathscr{O}.$$

Démonstration. — Le lemme s'obtient par un calcul sur les vecteurs de Witt. (Comparer avec le lemme 3.1.6 [**3**]).

□

1.3.3. Indexation des sommets et des arêtes de l'arbre. — On pose $g^0_\emptyset = \varpi^{-1}$, $g^1_\emptyset = 1$ et pour $i \geq 1$, et $x \in \mathbb{F}_q^i$, on définit

$$g_x^0 = \begin{pmatrix} -a(x) & \pi^{i-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & \pi^i \end{pmatrix}.$$

Un système de représentants des classes à gauche de G modulo K est donné par :

$$\mathcal{G} = \{1, \varpi, g_x^\epsilon \varpi, \ \text{ pour } \epsilon \in \{0,1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}. \tag{5}$$

Pour $g \in \mathcal{G}$, on parlera parfois du sommet g pour désigner le sommet gc_0. L'ensemble des sommets à distance $i \geq 1$ est

$$\{g_x^0\varpi, \ g_y^1\varpi, \ \text{ pour } x \in \mathbb{F}_q^i, \ y \in \mathbb{F}_q^{i-1}\}$$

Les sommets $\{g_x^1\varpi c_0 \ \text{ pour } y \in \mathbb{F}_q^i, i \in \mathbb{N}\}$ dont dits *de type* 1. Les autres sommets sont dits *de type* 0.

Remarque 1.5. — L'action de ϖ^2 sur les sommets de l'arbre est triviale. Soit $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$. La translation par ϖ envoie le sommet $g_x^0\varpi$ de type 0 à distance i sur le sommet $g_x^1\varpi$ de type 1 à distance $i+1$.

Un système de représentants des classes à gauche de G modulo I est donné par ([**3**]) :

$$\{1, g_x^\epsilon, \varpi, g_x^\epsilon\varpi, \ \text{ pour } \epsilon \in \{0,1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}. \tag{6}$$

Soient $\epsilon \in \{0,1\}$, $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$. L'arête

$$u_x^\epsilon := g_x^\epsilon u \tag{7}$$

est l'unique arête sortante d'extrémité $(g_x^\epsilon\varpi)c_0$. Elle est dite *de type* ϵ. Le faisceau issu de u_x^ϵ est indexé par $\mathbb{F}_q$: c'est l'ensemble $\{u^\epsilon_{(x,s)}, \ s \in \mathbb{F}_q\}$.

Remarque 1.6. — L'élément $(g_x^\epsilon\varpi)$, qui envoie $\tilde{u}$ sur u_x^ϵ, envoie le faisceau issu de $\tilde{u}$ sur le faisceau issu de u_x^ϵ. Plus précisément, l'arête u_s^0 adjacente à $\tilde{u}$ est envoyée par translation par $(g_x^\epsilon\varpi)$ sur l'arête $u^\epsilon_{(x,s)}$ adjacente à u_x^ϵ.

Notation 2. — Pour alléger les notations lorsque l'on travaillera avec les $q+1$ arêtes $\{u, u_s^0\}_{s\in\mathbb{F}_q}$ d'origine c_0, on les notera simplement $\{u, u_s\}_{s\in\mathbb{F}_q}$. Par convention, u est dite de type 1.

Notation 3. — Soit $i \in \mathbb{N}$. Nous adopterons la convention suivante : tout élément de $\mathbb{F}_q^{i+1}$ se décompose sous la forme (x,s) avec $x \in \mathbb{F}_q^i$ et $s \in \mathbb{F}_q$. Si $i = 0$, alors on pose $x = \emptyset$ et $(\emptyset, s) = s$.

1.3.4. Action de $I(1)$ sur les arêtes de l'arbre . —

Lemme 1.7. — *L'action de $I(1)$ sur les arêtes de $\mathcal{T}$ conserve la distance, l'orientation et le type des arêtes.*

Démonstration. — L'action de $K \supset I(1)$ sur les arêtes conserve la distance et l'orientation. Pour prouver que l'action de $I(1)$ conserve le type des arêtes on vérifie que l'ensemble des arêtes d'origine c_0 est partagé en deux orbites sous l'action de $I(1)$: celle de u d'une part, et d'autre part celle des q arêtes sortantes de type 0, $\{u_s, \ s \in \mathbb{F}_q\}$. Puis on procède par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Pour comprendre comment un élément de $I(1)$ donné agit sur une arête de l'arbre, il faut comprendre comment l'addition dans l'anneau $\mathcal{O}$ se reflète dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ *via* l'identification a. Dans le cas où F est une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, nous ferons par exemple usage du lemme 1.4. Illustrons cette observation au travers d'exemples.

Soient $\beta \in \mathcal{O}$, $i \in \mathbb{N}$, $x = (x_0, ..., x_i) \in \mathbb{F}_q^{i+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_x^0 &= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a(x) & \pi^i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a(x)-\beta) & \pi^i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\beta & 1 \end{pmatrix} g_x^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & \pi^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi(a(x)-\beta) & \pi^{i+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.8. — Soit $s \in \mathbb{F}_q$. On a $a(x) + \pi^i[s] = a(x_0, ..., x_i + s) \mod \pi^{i+1}\mathscr{O}$ et

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & -\pi^i[s]\\ 0 & 1\end{pmatrix} u_x^0 &= u^0_{(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+s)},\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\pi^{i+1}[s] & 1\end{pmatrix} u_x^1 &= u^1_{(x_0,\dots x_{i-1},x_i+s)}.\end{aligned}$$

Exemple 1.9. — On suppose que $i \geq 1$. Soit $s \in \mathbb{F}_q$.

1. Si $F = \mathbb{F}_q((t))$, On a $a(x) + \pi^{i-1}[s] = a(x_0, ..., x_{i-1} + s, x_i)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & -\pi^{i-1}[s]\\ 0 & 1\end{pmatrix} u_x^0 &= u^0_{(x_0,\dots,x_{i-1}+s,x_i)},\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\pi^{i}[s] & 1\end{pmatrix} u_x^1 &= u^1_{(x_0,\dots,x_{i-1}+s,x_i)}.\end{aligned}$$

2. Supposons que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Par le lemme 1.4 on a $a(x) + \pi^{i-1}[s] = a(x_0, ...x_{i-1} + s, x_i + Q(s^{1/p}, x_{i-1}^{1/p}))) \mod \pi^{i+1}\mathscr{O}$ d'où

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & -\pi^{i-1}[s]\\ 0 & 1\end{pmatrix} u_x^0 &= u^0_{(x_0,\dots,x_{i-1}+s,x_i+Q(s^{1/p},x_{i-1}^{1/p}))},\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\pi^{i}[s] & 1\end{pmatrix} u_x^1 &= u^1_{(x_0,\dots,x_{i-1}+s,x_i+Q(s^{1/p},x_{i-1}^{1/p}))}.\end{aligned}$$

1.3.5. — D'après le lemme 1.7, les applications s_A^ϵ et r_A^ϵ introduites par le lemme suivant sont bien définies. Nous énonçons leurs propriétés. On note $\mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})}$ la réunion des images de $\mathbb{F}_q^i$, $i \in \mathbb{N}$, dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$.

Lemme 1.10. — *Soient $\epsilon \in \{0, 1\}$, $A \in I(1)$. On note $r_A^\epsilon : \mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})}$, et $s_A^\epsilon : \mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{F}_q$, les applications entièrement déterminées par :*

$$\textit{pour tous } i \in \mathbb{N},\ i \geq 1,\ x \in \mathbb{F}_q^i, \qquad r_A^\epsilon(x) \in \mathbb{F}_q^i \ \textit{ et } \begin{cases} Au^\epsilon_{r_A^\epsilon(x)} = u_x^\epsilon \\ Au^\epsilon_{(r_A^\epsilon(x), s_A^\epsilon(x))} = u^\epsilon_{(x,0)}.\end{cases}$$

Elles vérifient les propriétés suivantes. Soient $i \geq 1$ et $x \in \mathbb{F}_q^i$.

1. *La birestriction $r_A^\epsilon : \mathbb{F}_q^i \to \mathbb{F}_q^i$ est bijective.*
2. *Pour tout $s \in \mathbb{F}_q$, on a : $Au^\epsilon_{(r_A^\epsilon(x),\, s_A^\epsilon(x)+s)} = u^\epsilon_{(x,s)}$.*
3. *Pour tout $s \in \mathbb{F}_q$, $r_A^\epsilon(x, s) = (r_A^\epsilon(x),\ s_A^\epsilon(x) + s)$.*
4. *Soient $A, B \in I(1)$. On a $r_{AB}^\epsilon = r_B^\epsilon \circ r_A^\epsilon$, $s_{AB}^\epsilon = s_B^\epsilon \circ r_A^\epsilon + s_A^\epsilon$. En particulier,*
$$r_{A^{-1}}^\epsilon = (r_A^\epsilon)^{-1} \quad \textit{et} \quad s_{A^{-1}}^\epsilon \circ r_A^\epsilon = -s_A^\epsilon.$$
5. *Si F est une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, alors l'application $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $s \mapsto s_A^\epsilon(x, s^p)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p.*

   Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, alors l'application $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q, x \mapsto s_A^\epsilon(x, s)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
6. *Si $F = \mathbb{Q}_p$ et $p \neq 2$, alors $\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s_A^\epsilon(x, s) = s_A^\epsilon(x)$. Si $F = \mathbb{Q}_2$, l'égalité est encore vraie si $A \in I(1)^{\pm}$.*

   Si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, $q > p$, ou bien si $F = \mathbb{F}_q((T))$ avec $q \neq 2$, alors $\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s_A^\epsilon(x, s) = 0$.

Le lemme est démontré à la section 5. Traduisons les exemples précédents en termes des applications r_A^ϵ et s_A^ϵ. Soient $i \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, et $s, t \in \mathbb{F}_q$.

Exemple 1.11. — • Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi^{i+1}[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $r^0_A(x,s) = (x,s)$, et $s^0_A(x,s) = t$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i+2}[t] & 1 \end{pmatrix}$. On a $r^1_A(x,s) = (x,s)$, $\ s^1_A(x,s) = t$.

Exemple 1.12. — • Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi^{i}[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, on a $r^0_A(x,s) = (x, s+t)$, $\ s^0_A(x,s) = 0$.
2. Si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, on a $r^0_A(x,s) = (x, s+t)$, $s^0_A(x,s) = Q(t^{1/p}, s^{1/p})$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i+1}[t] & 1 \end{pmatrix}$.

1. Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, alors $r^1_A(x,s) = (x, s+t)$, $\ s^1_A(x,s) = 0$.
2. Si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, alors $r^1_A(x,s) = (x, s+t)$, et $s^1_A(x,s) = Q(t^{1/p}, s^{1/p})$.

Ces exemples illustrent la propriété 5 annoncée par le lemme. Pour y lire aussi la propriété 6, nous faisons la remarque suivante, qui interviendra dans la preuve du lemme.

Remarque 1.13. — Soit $k \in \{1, ..., q-1\}$, alors on a

$$\begin{array}{rcrl} \sum_{x\in\mathbb{F}_q} x^k & = & 0 & \text{si} \quad k \neq q-1, \\ \sum_{x\in\mathbb{F}_q} x^k & = & -1 & \text{si} \quad k = q-1. \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{F}_q$. Le polynôme $Q(t,X)$ de degré $p-1$ a pour cœfficient dominant $-t$. On déduit des égalités précédentes que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } q = p, \text{ alors } \sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q} Q(t,s) = t, \\ \text{Si } q > p, \text{ alors } \sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q} Q(t,s) = 0. \end{array} \right. \tag{12}$$

A la lumière de cette remarque et des exemples précédents, on note que la propriété 6 du lemme est vérifiée pour s^0_A avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi^{i}[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i \geq 1$.

2. Le pro-p-module universel et la pro-p-algèbre de Hecke.

2.1. On désigne par C le module universel fini $\overline{\mathbb{F}}_p[U\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]$. Les doubles classes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ modulo U sont représentées par le groupe de Weyl fini W_0 égal au produit semi-direct $\mathcal{S}_2.T(\mathbb{F}_q)$ où l'on lit le groupe des permutations $\mathcal{S}_2$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. On note

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appellera algèbre de Hecke finie l'algèbre des $\overline{\mathbb{F}}_p$-endomorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-équivariants de C. Une base en est donnée par les fonctions caractéristiques des doubles classes $U\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/U$.

On désigne par $\mathbf{C}$ le pro-p-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$. C'est une représentation lisse de G et un module sur la pro-p-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$. Le sous-espace de $\mathbf{C}$ des fonctions à support dans K s'identifie avec le module universel fini C. Parmi les $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-endomorphismes de $\mathbf{C}$, ceux qui stabilisent ce sous-espace constituent une sous-algèbre de la pro-p-algèbre de Hecke qui s'identifie avec l'algèbre de Hecke finie. Une base de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ est donnée par les fonctions caractéristiques des doubles classes $I(1)\backslash G/I(1)$ indexées par le groupe de Weyl affine étendu $W =< \varpi > .W_0$. Il est muni d'une longueur qui étend la longueur du groupe de Weyl fini W_0 telle que ϖ est un élément de longueur nulle. Pour $w \in G$, on note T_w l'élément de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ correspondant à la double classe de w.

Proposition 2.1. — *Il existe un système de représentants D des classes à droite W/W_0 tel que*

$$\ell(dw_0) = \ell(d) + \ell(w_0) \quad \forall w_0 \in W_0.$$

Démonstration. — Ce résultat s'écrit en toute généralité pour le cas de $\mathrm{GL}_n(F)$ ([**5**]). Pour G, il est aisé de constater que l'on peut choisir $D = \{(s\varpi)^k,\ \varpi(s\varpi)^k,\ \ k \in \mathbb{N}\}$ car $(s\varpi)^k = \begin{pmatrix} \pi^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varpi(s\varpi)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{k+1} \end{pmatrix} W_0$.

□

Corollaire 2.2. — *La pro-p-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ est un module libre sur la sous-algèbre de Hecke finie de base l'ensemble des T_d, $d \in D$.*

2.2. Filtration. — Le module universel $\mathbf{C}$ est muni de la filtration suivante comme $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module et comme représentation de K

$$\mathbf{C} = \varinjlim_{i \geq 1}\ \mathbf{C}^{K_i},$$

où K_i désigne le sous-groupe de congruence de K des matrices congrues à l'identité modulo π^i.

Une base de $\mathbf{C}$ comme espace-vectoriel est donnée par les fonctions caractéristiques des classes $I(1)\backslash G$ notées

$$\{[I(1)w] = w^{-1}[I(1)],\ w \in I(1)\backslash G\}$$

où l'on désigne par $[I(1)]$ la fonction caractéristique du pro-p-Iwahori. Plus généralement, pour $I(1)X$ un sous-ensemble $I(1)$-homogène de G, on note $[I(1)X]$ la fonction caractéristique correspondante.

Proposition 2.3. — *Soit $i \in \mathbb{N}$. L'espace $\mathbf{C}^{K_{i+1}}$ des K_{i+1}-invariants de $\mathbf{C}$ est égal au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module engendré par les fonctions caractéristiques $\{[I(1)w],\ w \in I(1)\backslash G\}$ qui sont K_{i+1}-invariantes.*

Démonstration. — Nous montrons la proposition par récurrence sur i. L'espace des K_1-invariants a pour base les fonctions caractéristiques $[I(1)wK_1]$. Nous voulons montrer qu'une telle fonction est de la forme $T_d[I(1)z]$ avec $d \in D$, $z \in G$ tel que $[I(1)z]$ est K_1-invariante. Puisque K normalise K_1, il suffit de le montrer pour $w \in D$. Soit k la longueur de w dans le groupe de Weyl affine étendu : l'élément w est soit $(s\varpi)^k$ soit $\varpi(s\varpi)^k$. Dans les deux cas

$$w^{-1}I(1)w = \begin{bmatrix} 1+\pi\mathscr{O} & \pi^{-k}\mathscr{O} \\ \pi^{1+k}\mathscr{O} & 1+\pi\mathscr{O} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Cette égalité montre que $I(1) \subset w^{-1}I(1)wK_1$, donc la fonction $[I(1)wK_1]$ est en fait $I(1)$-invariante et égale à $T_w[I(1)]$.
Supposons la propriété vraie au rang $i-1$, $i \geq 1$ et montrons la au rang i. Nous voulons démontrer qu'une fonction caractéristique de la forme $[I(1)wK_{i+1}]$ s'écrit $T_d[I(1)z]$ avec $d \in D$ et $z \in G$. Comme précédemment, on se ramène à $w \in D$: on note k la longueur de w dans le groupe de Weyl affine étendu et l'on dispose à nouveau de l'égalité (13). Si la fonction $[I(1)wK_{i+1}]$ est en fait K_i-invariante, on conclut par hypothèse de récurrence. Sinon, c'est que K_i n'est pas contenu dans $w^{-1}I(1)wK_{i+1}$ ou encore que $k \geq i$. On pose alors $z = (s\varpi)^i$ et $d = wz^{-1} \in D$ et l'on vérifie que $T_d[I(1)z] = [I(1)dI(1)z] = [I(1)wK_{i+1}]$ car $(s\varpi)^{-i}I(1)(s\varpi)^i \subset w^{-1}I(1)wK_{i+1}$. L'égalité (13) appliquée à z permet de vérifier que $[I(1)z]$ est bien K_{i+1}-invariante. □

Corollaire 2.4. — *L'espace des K_1-invariants de $\mathbf{C}$ est engendré comme $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module par le module universel fini C. On a une décomposition en somme directe de représentations de K*

$$\mathbf{C}^{K_1} = \bigoplus_{d \in D} T_d C.$$

Démonstration. — La première assertion provient de la proposition précédente et du fait que pour $d \in D$, la fonction $[I(1)d]$ est K_1-invariante si et seulement si $d = 1$ ou $d = \varpi$ auquel cas elle est égale à $T_d[I(1)]$. La décomposition de $\mathbf{C}^{K_1}$ s'obtient en notant que D est un système de représentants des doubles classes $I(1)\backslash G/K$ et que $T_d C$ est un ensemble de fonctions à support dans $I(1)dK$. □

Remarque 2.5. — Les espaces $T_d C$ et C sont isomorphes (en tant que représentations de K) car la restriction de T_d à l'espace des $I(1)$-invariants $C^{I(1)} = Vect\{[I(1)], T_s[I(1)]\}$ est injective.

Lemme 2.6. — *Soient $i \geq 1$ et $w \in G$. On suppose que la fonction caractéristique $[I(1)wK_{i+1}]$ n'est pas K_i-invariante. Alors il existe un unique sommet g à distance i tel que la fonction est contenue $g\mathbf{C}^{K_1}$. Ce sommet de dépend que de la classe de w dans G/K_i.*

Démonstration. — On rappelle pour commencer qu'un sommet g est à distance $\leq i$ si et seulement s'il est K_i-invariant.

1) Traitons le cas où la fonction caractéristique $[I(1)wK_{i+1}]$ est égale à un élément de la forme $[I(1)z]$. Alors, on est ramené au fait suivant dans l'arbre $\mathcal{T}$: l'arête K_{i+1}-invariante $z^{-1}.u$ n'est pas K_i-invariante, donc elle possède un sommet à distance $i+1$ et un sommet à distance i. Ce dernier est l'unique sommet g à distance i tel que $z^{-1}.u$ est la translation par g d'une arête K_1-invariante.

2) Maintenant, traitons le cas général d'une fonction $[I(1)wK_{i+1}]$ qui n'est pas K_i-invariante. La preuve de la proposition 2.3 en fournit une écriture de la forme $T_d[I(1)z]$ avec $z \in G$, $d \in D$ où l'élément $[I(1)z]$ est K_{i+1}-invariant. Il n'est pas K_i-invariant par hypothèse. Le sommet g qui lui est associé par l'argument 1) est un sommet tel que $[I(1)wK_{i+1}]$ appartient $g\mathbf{C}^{K_1}$. Vérifions qu'un tel sommet est unique.
Dans le cas où d est de longueur nulle, c'est-à-dire $d = 1$ ou $d = \varpi$, l'unicité est assurée par l'argument 1) (remarquer que si $d = \varpi$, alors $T_d[I(1)z] = [I(1)\varpi z]$).
Si d est de longueur $\ell \geq 1$, montrons le fait suivant : pour $x \in G$, si $T_d[I(1)x] = T_d[I(1)]$, alors $[I(1)x] = [I(1)]$. Quitte à appliquer T_ϖ, on peut supposer que $d = (s\varpi)^\ell$ auquel cas $d^{-1}I(1)^- d \subset I(1)^-$ donc $BI(1)dI(1) = BI(1)$ où B désigne le sous-groupe de Borel de G des matrices triangulaires supérieures. L'hypothèse sur x signifie que $I(1)dI(1)x = I(1)dI(1)$ donc $BI(1)x = BI(1)$. L'espace G/B muni de l'action naturelle de G s'identifie avec la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$ munie de l'action de G par homographies, en associant à la classe de 1 le point à l'infini. L'ouvert $I(1)B$ de $G\backslash B$ correspond au complémentaire de $\mathscr{O}$, dont le stabilisateur est égal au sous-groupe d'Iwahori I. Ainsi $x \in I$ puis, aisément par l'hypothèse, $x \in I(1)$. Revenons au sommet g tel que $g^{-1}.T_d[I(1)z]$ est K_1-invariant : pour tout $k \in K_1$, on a $T_d[I(1)zgk_1] = T_d[I(1)zg]$ donc, par le fait précédent, g est un sommet tel que $g^{-1}[I(1)z]$ est K_1-invariant. D'où l'unicité déduite de l'unicité dans 1).

Le fait que le sommet g ne dépend que de la classe de $w \in G/K_i$ provient de ce que K_i nomalise K_{i+1} et fixe les sommets à distance i.

□

Proposition 2.7. — *Pour $i \geq 1$, le morphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module naturel suivant est un isomorphisme :*

$$\bigoplus_{g \in \mathcal{G},\, g \text{ à distance } i} g(\mathbf{C}^{K_1}/\mathbf{C}^{I(1)}) \to \mathbf{C}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}^{K_i}. \tag{14}$$

Démonstration. — Un sommet g est à distance $\leq i$ si et seulement si $g\mathbf{C}^{K_1} \subset \mathbf{C}^{K_{i+1}}$. De plus, notre choix du système de représentants $\mathcal{G}$ assure que si g est un sommet à distance i, alors le sous-groupe de G engendré par gK_1g^{-1} et K_i est égal à $gI(1)g^{-1}$. Ainsi,

$$g\mathbf{C}^{K_1} \cap \mathbf{C}^{K_i} = g\mathbf{C}^{I(1)} \tag{15}$$

et la translation par g définit un morphisme H-équivariant $g(\mathbf{C}^{K_1}/\mathbf{C}^{I(1)}) \to \mathbf{C}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}^{K_i}$: on dispose bien d'un morphisme H-équivariant

$$\bigoplus_{g\in\mathcal{G},\, g \text{ à distance } i} g(\mathbf{C}^{K_1}/\mathbf{C}^{I(1)}) \to \mathbf{C}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}^{K_i}. \tag{16}$$

Nous allons en donner un inverse en commençant par construire une application linéaire

$$\mathbf{C}^{K_{i+1}} \longrightarrow \bigoplus_{g\in\mathcal{G},\, g \text{ à distance } i} g(\mathbf{C}^{K_1}/\mathbf{C}^{I(1)}). \tag{17}$$

Une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^{K_{i+1}}$ est donnée par l'ensemble des fonctions caractérisques des doubles classes $I(1)\backslash G/K_{i+1}$. Soit $[I(1)wK_{i+1}]$ une telle fonction. Si elle est K_i-invariante, on lui associe l'élément nul. Si elle n'est pas K_i-invariante, on lui associe son image dans $g(\mathbf{C}^{K_1}/\mathbf{C}^{I(1)})$ où g est le sommet donné par le lemme 2.6. L'application linéaire (17) ainsi définie se factorise par $\mathbf{C}^{K_i}$. Pour s'en assurer, il suffit de vérifier que si la double classe $I(1)wK_i$ se décompose en

$$I(1)wK_i = \coprod_x I(1)wxK_{i+1},$$

alors la somme des $[I(1)wxK_{i+1}]$ appartient au noyau de (17). Puisque le sommet g ne dépend que de $w \in G/K_i$, chaque fonction $[I(1)wxK_{i+1}]$ appartient à $g\mathbf{C}^{K_1}$ donc la somme de ces fonctions est un élément K_i-invariant de $g\mathbf{C}^{K_1}$: d'après (15), elle appartient à $g\mathbf{C}^{I(1)}$ donc elle est dans le noyau de (17).
Sachant que le morphisme (16) est H-équivariant et que le H-module $\mathbf{C}^{K_1}$ est engendré par les $[I(1)w]$ qui sont K_1-invariantes, on vérifie, en utilisant l'unicité dans le lemme 2.6, que l'application linéaire ainsi construite

$$\mathbf{C}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}^{K_i} \longrightarrow \bigoplus_{g\in\mathcal{G},\, g \text{ à distance } i} g(\mathbf{C}^{K_1}/\mathbf{C}^{I(1)}) \tag{18}$$

est un inverse pour (16).

□

Remarque 2.8. — 1. Comparer la proposition avec le lemme 7 de [**4**].
2. Cette proposition est équivalente à dire que $\mathbf{C}$ est l'homologie de degré 0 du système de cœfficients naturellement associé par [**7**]. Voir [**5**].

2.3. Principe et initialisation de la preuve du théorème. — Rappelons, comme en [**4**] 2.1, que le pro-p-module universel se décompose en la somme directe de représentations de G suivante

$$\mathbf{C} = \bigoplus_\gamma ind_I^G \sigma_\gamma$$

où γ parcourt l'ensemble les orbites sous l'action de $\mathcal{S}_2$ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $T(\mathbb{F}_q) \simeq I/I(1)$ et σ_γ est la représentation de I triviale sur $I(1)$ égale à la somme directe des caractères contenus dans γ. L'unité de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ se décompose en une somme d'idempotents centraux orthogonaux $\{\epsilon_\gamma\}_\gamma$ où l'élément ϵ_γ est la projection $\mathbf{C} \to ind_I^G\sigma_\gamma$. Si $\gamma = \{\chi, s\chi\}$ est de cardinal 2, alors ϵ_γ est la somme des idempotents orthogonaux $\epsilon_\chi + \epsilon_{s\chi}$ où ϵ_χ est la projection sur $ind_I^G\chi$.

Soit M un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite. Pour comprendre l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \mathbf{C}$, nous allons déterminer successivement celui des $M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \mathbf{C}^{K_i}$ pour $i \geq 1$ en procédant à l'étude des

$$M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \epsilon_\gamma \mathbf{C}^{K_i}$$

que l'on mènera en traitant séparément les deux cas suivants :

– Si γ est de cardinal 1, on dit que l'on est dans le cas *Iwahori*. Quitte à tordre par un caractère de G, on est ramené à l'étude du foncteur des I-invariants et du produit tensoriel par $\mathbf{C_1} := \epsilon_{\mathbf{1}}\mathbf{C} = \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ de la catégorie des modules à droite sur l'algèbre de Hecke-Iwahori notée $H := \epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ vers celle des représentations de G engendrées par leurs I-invariants. La partie 3 est consacrée à ce cas.

– Si $\gamma = \{\chi, s\chi\}$ est de cardinal 2, on dit que l'on est dans le cas *régulier*. On est ramené par équivalence de Morita ([**4**] 2.1.2) à l'étude de $\mathbf{C}_\chi := \epsilon_\chi\mathbf{C} = ind_I^G\chi$ et des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} \epsilon\chi\mathbf{C}$. C'est l'objet de la partie 4. On note $H_\chi := \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi) = \epsilon_\chi\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))\epsilon_\chi$.

Appliquons dès à présent ce principe pour étudier l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \mathbf{C}^{K_1}$ et initialiser ainsi la preuve du théorème.

2.3.1. Cas Iwahori. — Supposons que χ est le caractère trivial. On a une identification naturelle G-équivariante entre les arêtes de l'arbre de Bruhat-Tits et une base de $\mathbf{C_1}$ qui associe à l'arête I-invariante u la fonction caractéristique de I. L'algèbre de Hecke-Iwahori $H = \epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ est engendrée par $\Omega = \epsilon_{\mathbf{1}}T_\varpi$ et $S = \epsilon_{\mathbf{1}}T_s$ avec les relations :

$$\Omega^2 = 1,\ S(S+1) = 0.$$

La description géométrique de l'action des générateurs S et Ω de H sur les arêtes de l'arbre donne en particulier, pour v une arête d'origine c ([**4**] 2.2.1) : Ω change v en son opposée et

(19) L'action de $(S+1)$ transforme v en la somme des $q+1$ arêtes d'origine c;

(20) l'action de $S\Omega$ transforme v en la somme des q arêtes adjacentes à v;

(21) soit v' une arête adjacente à v. On a $(S+1)\Omega v = (S+1)v$.

Le H-module $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}$ est projectif et égal à

$$\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1} = H(S+1)u \oplus \bigoplus_{s\in\mathbb{F}_q} HSu_s = Hu \oplus \bigoplus_{s\in\mathbb{F}_q^*} HSu_s. \tag{22}$$

La deuxième écriture ci-dessus souligne le fait que son espace des $I(1)$-invariants Hu (qui est même I-invariant) en est un facteur direct. (Comparer $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}$ avec le H-module Y_0 de [**4**] grâce à la proposition 2.3).

Soit M un H-module à droite. Un élément générique de $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}$ est de la forme

$$m \otimes (S+1)u + \sum_{s\in\mathbb{F}_q} m_s \otimes Su_s.$$

Supposons qu'il est $I(1)$-invariant, alors il est en particulier invariant sous l'action de $\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{F}_q$, qui fixe u et envoie u_s sur u_{s+x}. Donc notre élément $I(1)$-invariant est de la forme

$$m \otimes (S+1)u + m_0 \otimes \sum_{s\in\mathbb{F}_q} Su_s = m \otimes (S+1)u - m_0 \otimes Su$$

et appartient à $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$.

Proposition 2.9. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}$ est réduit à*

$$M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}.$$

Nous aurons par la suite besoin du lemme suivant. On pose $A_0 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Lemme 2.10. — *L'action de la matrice A_0 sur un élément*

$$E = m \otimes_H u + \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} m_s \otimes Su_s \in M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1} \text{ avec } m, m_s \in M,\ m_0 = 0$$

vérifie $A_0 E - E = \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} (m_{s+1} - m_s - m_1) \otimes Su_s \mod M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$.

Notation 4. — On note

$$X := \sum_{s\in\mathbb{F}_q} su_s.$$

C'est un élément $I(1)^+$-invariant de $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$. D'après le lemme précédent, si $q = p$, l'espace des $I(1)^+$-invariants de $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$ est isomorphe à MS et égal à

$$MS \otimes_H X.$$

Remarque 2.11. —
1. La décomposition (22) est démontrée dans [**4**]. On peut la montrer de façon plus naturelle en obtenant dans un premier temps son analogue pour le module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[B\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]$ et l'algèbre de Hecke du sous-groupe de Borel puis en utilisant le corollaire 2.4.
2. Mener alors une discussion comme ci-dessus pour le module universel fini fournit le résultat suivant : le foncteur des U-invariants est une équivalence, de la catégorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ engendrées par leurs B-invariants vers celle des modules à droites sur l'algèbre de Hecke de B. Un quasi inverse en est fourni par le produit tensoriel par le module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[B\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]$.

2.3.2. Cas régulier. — Dans ce paragraphe, $q > 2$. On fixe ζ un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_q^*$ et $a \in \{1, ..., q-2\}$. On considère le caractère régulier de $I/I(1)$ donné sur le tore fini par

$$\chi = 1 \otimes \chi_2 : \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*},\ \chi_2(\zeta) = \zeta^a.$$

Par torsion par un caractère de G, l'étude de l'induite compacte d'un caractère régulier de l'Iwahori se ramène au cas d'un caractère de cette forme.

Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $\mathbf{C}_\chi$ est donnée par l'ensemble des fonctions $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$ de support Ig^{-1} et de valeur 1 en g^{-1}, où g parcourt le système de représentants (6) des classes à gauche de G modulo I. On établit une bijection entre cette base de $\mathbf{C}_\chi$ et l'ensemble des arêtes de l'arbre en identifiant, pour tout g appartenant au système de représentants (6), l'arête gu avec l'élément $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$.

Remarque 2.12. — Cette bijection n'est pas compatible avec l'action de G mais elle est compatible avec l'action de $I(1)$: cela tient au choix du système de représentants (6) de G/I qui vérifie, pour tous $i \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{F}_q^i$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ $g_x^\epsilon (g_y^\epsilon)^{-1} \in I(1)$.

On a désigné par $H_\chi = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ l'algèbre de Hecke du caractère χ. C'est une algèbre commutative de générateurs T_1, T_2 avec la relation $T_1T_2 = 0$, où l'on désigne par T_1 (*resp.* T_2) l'élément de $H_\chi = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ de support $Is\varpi I$ (*resp.* $I\varpi sI$) et de valeur 1 en $s\varpi$ (*resp.* ϖs.) Le comportement géométrique de T_1 et T_2 sur les arêtes de l'arbre est décrit par ([**4**] 2.3.1).

On dispose d'une nouvelle base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel engendré par les arêtes de l'arbre, donc de $\mathbf{C}_\chi$, construite par analyse de Fourier en 2.3.1.2 *loc.cit* : on pose

$$w_0 := u_0, \text{ et pour } k \in \{1, ..., q-1\},\ w_{\zeta^k} := \textstyle\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} s^k u_s.$$

Puis, pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{F}_q^i$ et $s \in \mathbb{F}_q$, on pose

$$w_{(x,s)}^\epsilon := g_x^\epsilon \varpi w_s.$$

On définit de façon naturelle les $\tilde{w}_s$, $\tilde{w}_{(x,s)}^\epsilon$. L'action de T_1 et T_2 sur ces éléments est donnée par le lemme 5 *loc.cit*, à l'aide des polynômes Φ_1 et $\Phi_2 \in \mathbb{F}_q[X]$ qui sont respectivement la transformée de Fourier du polynôme $(1-X)^a$ et la transformée de Fourier inverse du polynôme $(1-X)^{q-1-a}$.

On suppose maintenant que $q = p$.

On note J le sous-ensemble de $\mathbb{F}_q^*$ à $p-a-1$ éléments

$$J = \{\zeta^{a+1}, \zeta^{a+2}, ..., \zeta^{p-1}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$ de cardinal a est $\{\zeta^{p-a}, \zeta^{p-a+1}, ..., \zeta^{p-1}\}$. D'après la proposition 7 *loc.cit*, le H_χ-module $\mathbf{C}_\chi^{K_1}$ est libre de base

$$\{u,\ \tilde{u},\ w_s,\ \tilde{w}_{s'},\quad s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\},$$

L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathbf{C}_\chi$ est égal au H_χ-module libre de base $\{u, \tilde{u}\}$. C'en est un facteur direct. Les lemmes suivants sont démontrés au paragraphe 5.2.

Lemme 2.13. — *Soit* $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $s \in J$ *et* $j \in \{a+1, ..., p-1\}$ *tel que* $s = \zeta^j$. *Alors* $A_0 w_s - w_s$ *est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de*

$$u, T_1(\tilde{u}),\quad w_{\zeta^{a+1}}, ..., w_{\zeta^{j-1}},\quad T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-a}}), ..., T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-1}}).$$

Soit $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$ *et* $j \in \{p-a, ..., p-1\}$ *tel que* $s' = \zeta^j$. *Alors* $A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'}$ *est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de*

$$T_2(u),\ \tilde{u},\ \tilde{w}_{\zeta^{p-a}}, ..., \tilde{w}_{\zeta^{j-1}},\ T_2(w_{\zeta^{a+1}}), ..., T_2(w_{\zeta^{p-1}}).$$

Soit M un H_χ-module à droite. Un élément générique de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_1}$ est de la forme

$$E = m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u} + \sum_{s \in J} m_s \otimes w_s + \sum_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)} \tilde{m}_{s'} \otimes \tilde{w}_{s'}$$

avec $m,\ \tilde{m},\ m_s,\ \tilde{m}_{s'} \in M$.

Lemme 2.14. — *Si cet élément est invariant modulo* $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ *sous l'action de* A_0, *alors les* m_s *et* $\tilde{m}_{s'}$ *sont nuls sauf éventuellement* $m_{\zeta^{a+1}}$ *et* $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}$ *qui vérifient*

$$m_{\zeta^{a+1}} T_1 = 0,\ \tilde{m}_{\zeta^{p-a}} T_2 = 0.$$

Proposition 2.15. — *L'espace des* $I(1)$-*invariants de* $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_1}$ *est réduit à* $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_1}$ est de la forme

$$E = m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u} + m_{\zeta^{a+1}} \otimes w_{\zeta^{1+a}} + \tilde{m}_{\zeta^{p-a}} \otimes \tilde{w}_{\zeta^{p-a}}$$

avec $m_{\zeta^{a+1}} T_1 = 0$, $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}} T_2 = 0$. D'après le lemme 2.13, l'élément $A_0 E - E$ est nulle d'une part, et égale à une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de $m_{\zeta^{a+1}} \otimes u$ et $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}} \otimes \tilde{u}$ d'autre part. Par conséquent, $E = m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u}$ appartient à $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$.

□

On distingue les éléments K_1-invariants de $\mathbf{C}_\chi$ suivants

(23) $$Y = \tilde{w}_{\zeta^{p-a}},\ Z = w_{\zeta^{1+a}}$$

Remarque 2.16. — On a $T_2 Z = \Phi_2(\zeta) \sum_{s \in \mathbb{F}_p} s\tilde{u}_s$, $T_1 Y = \Phi_1(\zeta^{p-a}) \sum_{s \in \mathbb{F}_p} s u_s$.

3. Le foncteur des I-invariants

Dans toute cette section, M désigne un module à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori que nous avons notée H. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. — *– On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$. L'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_H \mathbf{C_1}$ est égal à $M \otimes_H \mathbf{C_1}^{I(1)}$.*
– Supposons que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :
  – $q \neq 2$ et $F = \mathbb{F}_q((T))$,
  – F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$.

On désigne par $\mathfrak{M}$ le H-module simple à droite supersingulier. L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M} \otimes_H \mathbf{C_1}$ est de dimension infinie.

Comme annoncé au paragraphe 2.3, nous allons étudier les espaces $M \otimes_H \mathbf{C_1}^{K_i}$ pour $i \geq 1$. Notons, par la décomposition (22) et la proposition 2.7, que le H-module $\mathbf{C_1}^{K_1}/\mathbf{C_1}^{I(1)}$ est projectif et que $\mathbf{C_1}^{K_i}$ est un facteur direct de $\mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$ de sorte que $M \otimes_H \mathbf{C_1}$ s'identifie avec la limite inductive des $(M \otimes_H \mathbf{C_1}^{K_i})_{i \geq 1}$ où les flèches sont données par les inclusions.

3.1. — Les éléments suivants rappellent ceux qui ont été introduits par Breuil **[3]** 3.2.

Notation 5. — Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, on définit l'élément de $\mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$ suivant :

$$X_i^\epsilon := \sum_{\substack{g \in \mathcal{G} \text{ à distance } i \\ \text{de type } \epsilon}} gX.$$

En termes d'arêtes de l'arbre :

$$\begin{cases} X_0^0 &= \sum_{s \in \mathbb{F}_q} su_s^0, \\ X_i^0 &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} su_{(x,s)}^0, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1^1 &= \sum_{s \in \mathbb{F}_q} su_s^1 \\ X_i^1 &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^{i-1}} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} su_{(x,s)}^1, \end{cases} \text{ pour } i \geq 1.$$

D'après la remarque 1.5, on a $\varpi X_i^0 = X_{i+1}^1$.

Lemme 3.2. — *On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$. Soit $A \in I(1)$. Si $p = 2$ on exige de plus que A soit dans $I(1)^\pm$. Pour $i \geq 1$, les éléments $S(AX_i^0 - X_i^0)$ et $S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1)$ appartiennent respectivement à $\mathbf{C_1}^{K_i}$ et $\mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$ et sont égaux à :*

$$\sum_{1 \leq l \leq i} (S\Omega)^l (\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-l+1}} s_A^0(x) Su_x^0) - \sum_{1 \leq l \leq i-1} (S\Omega)^{l-1} (\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-l}} s_A^0(x) Su_x^0) - (S\Omega)^i (S+1) \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^0(x) u,$$

$$\sum_{1 \leq l \leq i} (S\Omega)^l (\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-l+1}} s_A^1(x) Su_x^1) - \sum_{1 \leq l \leq i-1} (S\Omega)^{l-1} (\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-l}} s_A^1(x) Su_x^1) - (S\Omega)^i (S+1) \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x) \Omega u.$$

Le lemme 3.2 se montre par récurrence sur i grâce au lemme 1.10 et à la description géométrique des actions de S et Ω. Les détails de la preuve sont donnés au paragraphe 5.2.

3.2. Cas $F = \mathbb{Q}_p$.— Soit $i \geq 1$. On considère un élément E appartenant à $M \otimes_H \mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$.

Proposition 3.3. — *Supposons que E est $I(1)^\pm$-invariant modulo $M \otimes \mathbf{C_1}^{K_i}$. Il existe $\alpha^0, \alpha^1 \in M$ tels que*

$$E = \alpha^0 \otimes SX_i^0 + \alpha^1 \otimes SX_i^1 \mod M \otimes_H \mathbf{C_1}^{K_i}.$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.7 (et la relation (15)), on a la décomposition K_i-équivariante suivante

$$M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G} \text{ à distance } i} M \otimes_H g(\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/(\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}). \tag{24}$$

L'élément E est invariant sous l'action de K_i qui fixe les sommets à distance i. De plus, si $g \in \mathcal{G}$ est un tel sommet, alors $g^{-1}K_i g$ contient $I(1)^+$. Dans (24), l'élément E se décompose donc comme suit

$$\sum_{g \in \mathcal{G} \text{ à distance } i} m_g \otimes gSX \mod M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer que les m_g ne dépendent pas du type 0 ou 1 du sommet g. On peut procéder séparément pour le type 0 et le type 1 car l'action de $I(1)$ préserve le type des sommets. Soit $x \in \mathbb{F}_q^{i-1}$. Le sommet à distance i envoyé par l'action de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & 1 \end{pmatrix}$ sur le sommet $g_x^1\varpi$ est le sommet $g_{(0,\ldots,0)}^1\varpi$. On a de plus, $Bg_{(0,\ldots,0)}^1\varpi X = g_x^1\varpi X$. On en déduit que pour tout sommet g de type 1 distance i, l'élément m_g est égal à $m_{g_{(0,\ldots,0)}^1}$.

□

Proposition 3.4. — *Supposons que $i \geq 2$. Il existe $\alpha^0, \alpha^1, \beta^0, \beta^1 \in M$ tels que*

$$E = \alpha^0 \otimes SX_i^0 + \alpha^1 \otimes SX_i^1 + \beta^0 \otimes SX_{i-1}^0 + \beta^1 \otimes SX_{i-1}^1 \mod M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i-1}}$$

et vérifiant

$$\alpha^0 S\Omega S = 0 \text{ et } \alpha^0 S = \beta^0 S\Omega S,$$
$$\alpha^1 S\Omega S = 0.$$

Si $i \geq 3$, on a de plus $\alpha^1 S = \beta^1 S\Omega S$.

Démonstration. — D'après la décomposition (22), le H-module $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$ est projectif. Par la proposition 2.7, le H-module $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$ est donc isomorphe à la somme directe des translatés de $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$ par les sommets $g \in \mathcal{G}$ à distance $\leq i$ et

$$M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)} = \bigoplus_{\substack{g \in \mathcal{G} \text{ à distance } \leq i \\ \text{de type } 0}} M \otimes_H g(\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}) \oplus \bigoplus_{\substack{g \in \mathcal{G} \text{ à distance } \leq i \\ \text{de type } 1}} M \otimes_H g(\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_1}/\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}).$$

Chacun des deux sous-espaces de la décomposition est stable sous l'action $I(1)$ qui préserve la distance et le type des sommets. Si un élément de $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}$ est, modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$, à composante dans le premier (*resp.* deuxième) sous-espace, on dit qu'il est de type 0 (*resp.* 1). Le type de l'élément est inchangé par l'action de $I(1)$.

L'élément E est la somme d'un élément E^0 de type 0 et d'un élément E^1 de type 1 qui sont tous deux $I(1)$-invariants modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$. Commençons par donner la forme de E^1.

L'existence de α^1 est assurée par la proposition précédente. On note $F = E^1 - \alpha^1 \otimes SX_i^1$. C'est un élément de type 1 de $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i}$. Pour $A \in I(1)$ (ou $A \in I(1)^{\pm}$ si $p = 2$), la composante modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i-1}}$ de $\alpha^1 \otimes S(AX_i^1 - X_i^1)$ est donnée par le lemme 3.2 :

$$\alpha^1 \otimes S(AX_i^1 - X_i^1) = \alpha^1 S\Omega \otimes \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-2}, s \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x,s) Su_{(x,s)}^1 \mod M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i-1}}. \tag{25}$$

Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i-1} & 1 \end{pmatrix}$, le cœfficient $s_A^1(x,s)$ est égal à $Q(1,s)$, c'est l'exemple 1.12.

En particulier, il est nul pour $s = 0$. La composante modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i-1}}$ de $AF - F$ est quant à elle donnée par le lemme 2.10 (vérifier que pour $g \in \mathcal{G}$ de type 1 à distance $i-1$, la matrice $g^{-1}Ag$ est égale à A_0). Elle est de la forme

$$AF - F = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-2} s\in\mathbb{F}_p^*} (m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)}) \otimes Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-1}},$$

où les $m_{(x,s)} \in M$ et $m_{(x,0)} = 0$. Puisque E^1 est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{I(1)}$, on a l'égalité $(m^1_{(x,s+1)} - m^1_{(x,s)} - m^1_{(x,1)})S = -\alpha^1 Q(1,s)S\Omega S$, pour tous $x \in \mathbb{F}_p^{i-2}$, $s \in \mathbb{F}_p^*$. A x fixé, nous la sommons sur les $s \in \mathbb{F}_p$. Puisque l'on travaille sur $F = \mathbb{Q}_p$, la remarque 1.13 dit que le terme obtenu à droite vaut $-\alpha^1 S\Omega S$. Le terme obtenu à gauche est nul. D'où

$$\alpha^1 S\Omega S = 0.$$

Mais alors, l'égalité (25) montre que, comme E^1, l'élément F est $I(1)$-invariant (*resp.* $I(1)^{\pm}$-invariant) modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-1}}$. Par conséquent, on applique la proposition précédente qui fournit un élément $\beta^1 \in M$ tel que

$$F = \beta^1 \otimes SX^1_{i-1} \mod M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-1}}.$$

Supposons de plus que $i \geq 3$. Nous travaillons maintenant modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-2}}$ avec l'élément $L = F - \beta^1 \otimes SX^1_{i-1}$ de $M \otimes \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-1}}$. A l'aide des lemmes 2.10 et 3.2, on calcule la composante de $AL - L$ modulo $M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-2}}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i-2} & 1 \end{pmatrix}$. Elle est de la forme

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-3} s\in\mathbb{F}_p^*} (n_{(x,s+1)} - n_{(x,s)} - n_{(x,1)}) \otimes Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-2}}$$

où les $n_{(x,s)}$ appartiennent à M et $n_{(x,0)} = 0$. Par ailleurs,

$$\alpha^1 \otimes S(AX^1_i - X^1_i) = -\alpha^1 \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-3}, s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s)Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-2}}.$$

$$\beta^1 \otimes S(AX^1_{i-1} - X^1_{i-1}) = \beta^1 S\Omega \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-3}, s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s)Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i-2}}.$$

D'où, pour tous $\mathbb{F}_p^{i-3}$ et $s \in \mathbb{F}_p^*$,

$$Q(1,s)(\alpha^1 S - \beta^1 S\Omega S) = (n_{(x,s+1)} - n_{(x,s)} - n_{(x,1)})S.$$

Sommant, à x fixé, cette égalité sur tous les $s \in \mathbb{F}_p$, le terme de gauche devient $\alpha^1 S - \beta^1 S\Omega S$, et celui de droite est nul. Ainsi, on a

$$\alpha^1 S = \beta^1 S\Omega S.$$

Pour trouver maintenant la forme de la composante E^0 de type 0 de E on rappelle que l'élément ϖ qui normalise $I(1)$ envoie le sommet $g^0_x\varpi$ de type 0 à distance i sur le sommet $g^1_x\varpi$ de type 1 à distance $i+1$. Ainsi, ϖE est un élément $I(1)$-invariant appartenant à $M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i+2}}$. Il se décompose en la somme de ϖE^0 et de ϖE^1 qui sont respectivement ses composantes de type 1 et 0. On applique alors le résultat précédent à ϖE^0 et l'on obtient le résultat annoncé.

□

Proposition 3.5. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_3}$ est égal à $M \otimes_H \mathbf{C}_\mathbf{1}^{I(1)}$.*

Démonstration. — On considère toujours notre élément $I(1)$-invariant E et l'on suppose qu'il appartient à $M \otimes \mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_3}$. D'après ce qui précède, il est de la forme

$$E = \alpha^0 \otimes SX^0_2 + \beta^0 \otimes SX^0_1 + \alpha^1 \otimes SX^1_2 + \beta^1 \otimes SX^1_1 + z$$

avec $\alpha^0, \beta^0, \alpha^1, \beta^1 \in M$,

$$\alpha^0 S\Omega S = 0, \ \alpha^0 S = \beta^0 S\Omega S, \ \alpha^1 S\Omega S = 0, \tag{26}$$

et $z = \sum_{s\in\mathbb{F}_p} m_s \otimes Su_s + m\otimes u$, où $m, m_s \in M$, $m_0 = 0$. L'action de $A := A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ fixe les arêtes u_s^1. Ainsi, l'action de A sur les deux derniers termes de E est :

$$\begin{aligned} Az - z &= \sum_{s\in\mathbb{F}_p^*}(m_{s+1} - m_s - m_1)\otimes Su_s - m_1\otimes Su, \\ \beta^1\otimes S(AX_1^1 - X_1^1) &= 0. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.2 et du fait des relations (26),

$$\begin{aligned} \alpha^0\otimes S(AX_2^0 - X_2^0) &= -\alpha^0\otimes\sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s)Su_s \\ \beta^0\otimes S(AX_1^0 - X_1^0) &= \alpha^0\otimes\sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s)Su_s - \beta^0 S\Omega(S+1)\otimes u \\ \alpha^1 S\otimes S(AX_2^1 - X_2^1) &= -\alpha^1(\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s_A^1(s))S\otimes u. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{lcll} -m_1 S - \beta^0 S\Omega(S+1) - \alpha^1(\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s_A^1(s))S &=& 0 & \\ (m_{s+1} - m_s - m_1)S &=& 0 & \text{pour tout } s\in\mathbb{F}_p. \end{array}\right. \tag{27}$$

On multiplie la première égalité à droite par $(S+1)$ sachant que $S(S+1) = 0$, pour obtenir $\beta^0 S = 0$ puis $\alpha^0 S = 0$. D'où

$$E = \alpha^1\otimes SX_2^1 + \beta^1\otimes SX_1^1 + z.$$

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1\end{pmatrix}$. L'action de A fixe z et

$$\begin{aligned} \beta^1\otimes S(AX_1^1 - X_1^1) &= \beta^1\otimes\sum_{s\in\mathbb{F}_p} S(su_{s-1}^1 - su_s^1) = \beta^1\otimes S\sum_{s\in\mathbb{F}_p} u_s^1 = \beta^1\otimes S(S\Omega u) = -\beta^1\otimes S\Omega u, \\ \alpha^1\otimes S(AX_2^1 - X_2^1) &= -\alpha^1 S\Omega(S+1)\otimes\Omega u = -\alpha^1\otimes Su \text{ car } \alpha^1 S\Omega S = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha^1 S + \beta^1 S\Omega = 0$ puis $\alpha^1 S = \beta^1 S = 0$ et $E\in M\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_1}$. On conclut avec la proposition 2.9.

□

Notation 6. — On désigne par $\mathfrak{M}$ le H-module à droite supersingulier. D'après ([**9**] 3.2), c'est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $H/(\Omega SH + (S+1)H)$ de dimension 2 de base les images $[1]$ et $[\Omega]$ de 1 et Ω dans le module quotient. Remarquons que $S\Omega S$ agit par zéro sur $\mathfrak{M}$.

Proposition 3.6. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}$ est égal à $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}^{I(1)}$.*

Démonstration. — Soit E un élément de $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}$ que l'on suppose $I(1)$-invariant. Si E appartient à $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_3}$, alors il appartient à $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}^{I(1)}$ d'après la proposition 3.5. Si E appartient à $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$, $i\geq 3$, alors la proposition 3.4 donne sa composante modulo $\mathfrak{M}\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_{i-1}}$. Puisque $S\Omega S$ agit par zéro sur $\mathfrak{M}$, cette composante est nulle. On conclut par récurrence. □

Proposition 3.7. — *Soit M un H-module à droite. L'espace des $I(1)$-invariants de $M\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$, $i\in\mathbb{N}$, est égal à $M\otimes \mathbf{C_1}^{I(1)}$.*

Démonstration. — Le résultat pour $i = 2$ est donné par la proposition 3.5. Supposons la proposition démontrée pour $i-1$ avec $i\geq 3$. Un élément $I(1)$-invariant E de $M\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_{i+1}}$ est de la forme

$$E = \alpha^0\otimes SX_i^0 + \alpha^1\otimes SX_i^1 \mod M\otimes_H \mathbf{C_1}^{K_i}.$$

Si E n'appartient pas à $M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i}$, alors $\alpha^0 S \neq 0$ ou $\alpha^1 S \neq 0$. On a une suite exacte de H-modules à droite

$$0 \to \alpha^0 SH + \alpha^1 SH \to M \xrightarrow{\mathscr{P}} M/(\alpha^0 SH + \alpha^1 SH) \to 0$$

qui, par platitude du H-module $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}$, donne la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules

$$0 \longrightarrow (\alpha^0 SH + \alpha^1 SH) \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}} \longrightarrow M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}, \xrightarrow{\mathscr{P}\otimes id} \mathscr{P}(M) \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}} \longrightarrow 0.$$

L'image de E par $\mathscr{P} \otimes id$ est un élément $I(1)$-invariant appartenant à $\mathscr{P}(M) \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i}$. Par hypothèse de récurrence, appliquée à $\mathscr{P}(M)$,

$$(\mathscr{P} \otimes id)(E) \in \mathscr{P}(M) \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)},$$

c'est-à-dire, il existe $m \in M$, tel que

$$E - m \otimes_H u \in Ker(\mathscr{P} \otimes id) = (\alpha^0 SH + \alpha^1 SH) \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}.$$

Pour démontrer que $E \in M \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{I(1)}$, il suffit alors de remarquer que pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, le sous-H-module à droite de M engendré par $\alpha^\epsilon S$ est, s'il est non nul, isomorphe au H-module à droite supersingulier $\mathfrak{M}$ puis d'appliquer la proposition 3.6. □

3.3. Le foncteur des I-invariants n'est pas en général une équivalence de catégories. — Soit $\mathfrak{M}$ le H-module à droite supersingulier. On suppose que l'on est dans l'un des cas suivants : $F = \mathbb{F}_q((T))$ avec $q \neq 2$, ou bien F est l'extension non ramifiée de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$.

Proposition 3.8. — *Soit $i \geq 2$. L'élément $[1] \otimes SX_i^0$ est un élément $I(1)$-invariant de $\mathfrak{M} \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}$ qui n'appartient par à $\mathfrak{M} \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i}$.*

Corollaire 3.9. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M} \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.*

Preuve de la proposition 3.8. — On rappelle que $X_i^0 = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} s u^0_{(x,s)}$. L'élément $[1] \otimes SX_i^0$ est bien un élément de $\mathfrak{M} \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_{i+1}}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{M} \otimes_H \mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{K_i}$. Soit $A \in I(1)$. Montrons que X_i^0 est invariant sous l'action de A.

$$\begin{aligned} A^{-1} X_i^0 &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s A^{-1} u^0_{(x,s)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s u^0_{(r_A^0(x),\, s_A^0(x)+s)} && \text{par l'assertion 3 du lemme 1.10,} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} (s - s_A^0(x)) u^0_{(r_A^0(x),s)}. \end{aligned}$$

Or, par bijectivité de r_A^0, on a $X_i^0 = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s u^0_{(r_A^0(x),s)}$. D'où

$$\begin{aligned} A^{-1} X_i^0 - X_i^0 &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} (-s_A^0(x)) u^0_{(r_A^0(x),s)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} (-s_A^0(x)) \sum_{s \in \mathbb{F}_q} u^0_{(r_A^0(x),s)} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} (-s_A^0(x)) S\Omega u^0_{r_A^0(x)} && \text{d'après (20),} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) S\Omega u^0_x && \text{par l'assertion 4 du lemme 1.10.} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $S^2 = -S$, on a dans $\mathfrak{M} \otimes_H Y_i$,

$$[1] \otimes S(A^{-1} X_i^0 - X_i^0) = -[1] \otimes \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) S\Omega u^0_x.$$

Chaque $x \in \mathbb{F}_q^i$ s'écrit $x = (x_0, ..., x_{i-1})$ et l'arête u_x^0 est adjacente à $u^0_{(x_0,...,x_{i-2})}$. D'après (21), on a $(S+1)u_x^0 = (S+1)\Omega u^0_{(x_0,...,x_{i-2})}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}[1]\otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) &= -[1]S\otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)(\Omega(S+1)\Omega u^0_{(x_0,..,x_{i-2})} - \Omega S u_x^0)\\ &= -[1](S\Omega S\Omega + S\Omega^2)\otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)u^0_{(x_0,..,x_{i-2})} + [1]S\Omega S\otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)u_x^0.\end{aligned}$$

Or, $\Omega^2 = 1$ et, dans le H-module à droite supersingulier $\mathfrak{M}$, on a $[1]S\Omega S = 0$. Ainsi,

$$[1]\otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) = -[1]S\otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)u^0_{(x_0,..,x_{i-2})}$$

Mais, l'assertion 6 du lemme 1.10 dit que $\sum_{x_{i-1}\in\mathbb{F}_q} s^0_{A^{-1}}(x_0, ..., x_{i-2}, x_{i-1}) = 0$. Ainsi,

$$[1]\otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) = 0.$$

□

4. Etude de la partie régulière du foncteur des $I(1)$-invariants

Dans cette section on suppose toujours $q \neq 2$ de sorte qu'il existe bien des caractères réguliers de $I/I(1)$. On reprend les notations du paragraphe 2.3.2. Désormais, M désigne un H_χ-module à droite. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.1. — – *On suppose $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. L'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi$ est égal à $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$.*
– *Supposons que le corps résiduel de F est de cardinal $q > p$. Il existe un caractère régulier χ_0 du tore fini tel que, si l'on note $\mathfrak{M}_{\chi_0}$ le H_{χ_0}-caractère supersingulier, alors l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_{\chi_0} \otimes_{H_{\chi_0}} \mathbf{C}_{\chi_0}$ est de dimension infinie.*

Comme annoncé au paragraphe 2.3, nous allons étudier les espaces $M \otimes_H \mathbf{C}_\chi^{K_i}$ pour $i \geq 1$. On a vu que si $q = p$, le H_χ-module $\mathbf{C}_\chi^{K_1}/\mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ est libre. Par la proposition 2.7, $\mathbf{C}_\chi^{K_i}$ est un facteur direct de $\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ de sorte que $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi$ s'identifie avec la limite inductive des $(M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i})_{i\geq 1}$ où les flèches sont données par les inclusions.

Notation 7. — Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, on définit les éléments de $\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ suivants :

$$Y_i^\epsilon := \sum_{\substack{g\in\mathcal{G} \text{ à distance } i\\ \text{de type } \epsilon}} gY, \quad Z_i^\epsilon := \sum_{\substack{g\in\mathcal{G} \text{ à distance } i\\ \text{de type } \epsilon}} gZ.$$

4.1. Cas où $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$.

— Soit $i \geq 1$. On note $A^0_{i-1} = \begin{pmatrix}1 & \pi^{i-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^1_{i-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \pi^i & 1\end{pmatrix}$.

Lemme 4.2. — *Soit $\epsilon \in \{0, 1\}$. L'élément $A^\epsilon_{i-1}Y^\epsilon_{i+\epsilon} - Y^\epsilon_{i+\epsilon}$ est égal à la somme d'un l'élément de $T_2\mathbf{C}_\chi$ et d'un élément de $\mathbf{C}_\chi^{K_{i+\epsilon}}$ égal à une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants, pour x parcourant $\mathbb{F}_p^{i-1}$:*

$$w^\epsilon_{(x,s)}, \quad s\in J,$$

$$\tilde{u}^\epsilon_x + T_1(\tilde{w}^\epsilon_{(x,\zeta^{p-1})}) \qquad \text{et} \qquad T_1(\tilde{w}^\epsilon_{(x,s')}),\ \text{pour } s'\in\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),\ \ s'\neq\zeta^{p-1}.$$

L'élément $A^\epsilon_{i-1}Z^\epsilon_{i+\epsilon} - Z^\epsilon_{i+\epsilon}$ est la somme d'un l'élément de $T_1\mathbf{C}_\chi$ et d'un élément de $\mathbf{C}_\chi^{K_{i+\epsilon}}$ égal à une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants, pour x parcourant $\mathbb{F}_p^{i-1}$:

$$\tilde{w}^\epsilon_{(x,s')}, \quad s'\in\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),$$

$$u^\epsilon_x + T_2(w^\epsilon_{(x,\zeta^{p-1})}) \qquad \text{et} \qquad T_2(w^\epsilon_{(x,s)}),\ \text{pour } s\in J,\ \ s\neq\zeta^{p-1}.$$

La preuve de ce lemme, effectuée au paragraphe 5.2, fait seulement intervenir le fait que $q = p$ sous la forme de la condition (iv) du théorème 3 de **[4]**, qui nous assure que l'on a la suite exacte de H_χ-modules

$$0 \longrightarrow T_1\mathbf{C}_\chi \longrightarrow \mathbf{C}_\chi \xrightarrow{T_2} T_2\mathbf{C}_\chi \longrightarrow 0.$$

Soit $i \geq 1$. Soit E un élément de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ que l'on suppose $I(1)$-invariant.

Proposition 4.3. — *L'élément E est de la forme*

$$\alpha^0 \otimes Y_i^0 + \beta^0 \otimes Z_i^0 + \alpha^1 \otimes Y_i^1 + \beta^1 \otimes Z_i^1 \mod M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$$

avec α^0, β^0, α^1, β^1 des éléments de M tels que

$$\alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0, \quad \beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0, \quad \textit{et } \alpha^0 \in MT_2, \ \beta^0 \in MT_1.$$

Si de plus $i \geq 2$, on a $\quad \alpha^1 \in MT_2, \quad \beta^1 \in MT_1.$

Démonstration. — L'existence de α^0, β^0, α^1, $\beta^1 \in M$ tels que $\alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0, \beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0$ et

$$E = \alpha^0 \otimes Y_i^0 + \beta^0 \otimes Z_i^0 + \alpha^1 \otimes Y_i^1 + \beta^1 \otimes Z_i^1 \mod M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$$

est assurée par un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition 3.3, grâce au lemme 2.14. Par le même argument que celui de la preuve de la proposition 3.4, on se ramène ensuite au cas où E est un élément de type 1 c'est-à-dire qu'il s'identifie, modulo $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ à un élément de

$$\bigoplus_{\substack{g \in \mathcal{G} \text{ à distance } \leq i \\ \text{de type } 1}} M \otimes_{H_\chi} g(\mathbf{C}_\chi^{K_1}/\mathbf{C}_\chi^{I(1)}).$$

En particulier, on s'est ramené à $E = \alpha^1 \otimes Y_i^1 + \beta^1 \otimes Z_i^1 \mod M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$.
Supposons que $i \geq 2$. Nous travaillons alors modulo $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i-1}}$ avec l'élément $F = E - \alpha^1 \otimes Y_i^1 - \beta^1 \otimes Z_i^1$. C'est un élément de type 1 de $M \otimes_H \mathbf{C}_\chi^{K_i}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i-1} & 1 \end{pmatrix}$. L'action de A sur F se calcule grâce au lemme 2.13.
Ainsi, pour $x \in \mathbb{F}_p^{i-2}$, la composante de $AF - F$ selon $M \otimes w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ appartient à $MT_2 \otimes w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ et sa composante selon $M \otimes \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ appartient à $MT_1 \otimes \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$.

D'autre part, le lemme 4.2 décrit $\alpha^1 \otimes A(Y_i^1 - Y_i^1)$ car $\alpha^1 T_2 = 0$. Ainsi, sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près, à $\alpha^1 \otimes w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ tandis que sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ appartient à $MT_1 \otimes_{H_\chi} \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$.
De même, la composante de $\beta^1 \otimes A(Z_i^1 - Z_i^1)$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près, à $\beta^1 \otimes \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ tandis que sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ appartient à $MT_2 \otimes_{H_\chi} w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$.

Les composantes de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ et $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ étant nulles, on a $\alpha \in MT_2$ et $\beta \in MT_1$.
On traite le cas où E est de type 0 et on conclut comme dans la preuve de la proposition 3.4. □

Proposition 4.4. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_2}$ est égal à $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$.*

Démonstration. — On considère toujours notre élément $I(1)$-invariant E et l'on suppose qu'il appartient à $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_2}$. D'après ce qui précède, il est de la forme

$$E = \alpha^0 \otimes Y_1^0 + \beta^0 \otimes Z_1^0 + \alpha^1 \otimes Y_1^1 + \beta^1 \otimes Z_1^1 + z$$

avec α^0, β^0, α^1, β^1, $\in M$ tels que

$$\alpha^0 \in MT_2,\ \ \beta^0 \in MT_1,\ \ \alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0,\ \ \beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0, \tag{28}$$

et $z = \sum_{s \in J} m_s \otimes w_s + \sum_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} \tilde{m}_{s'} \otimes \tilde{w}_{s'} \ + m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u}$ où m_s, $\tilde{m}_{s'}$, m, $\tilde{m} \in M$.

Nous considérons tout d'abord l'action de $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur E pour montrer que $\alpha^0 = \beta^0 = 0$.

– L'action de A fixe Y_1^1 et Z_1^1.

– Le lemme 4.2 permet de décrire l'action de A sur $\beta^0 \otimes Z_1^0$ puisqu'il donne la forme de $AZ_1^0 - Z_1^0$ modulo $T_1 \mathbf{C}_\chi$ et que $\beta^0 T_1 = 0$. En utilisant aussi le fait que $\beta^0 \in MT_1$, donc $\beta^0 T_2 = 0$, on a : $\beta^0 \otimes (AZ_1^0 - Z_1^0)$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de
$$\beta^0 \otimes \tilde{u},\ \ \beta^0 \otimes \tilde{w}_{s'},\ \ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J),$$

– De même, $\alpha^0 \otimes (A_0 Y_1^0 - Y_1^0)$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants,

$$\alpha^0 \otimes u,\ \alpha^0 \otimes w_s,\ \ s \in J,$$

– Le lemme 2.13 décrit l'action de A sur z.

A l'aide de ces quatre remarques, nous faisons un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 2.14.

a) Soit $j \in \{a+2, ..., p-1\}$. D'après ce qui précède, la contribution de $\beta^0 \otimes (AZ_1^0 - Z_1^0)$ à la composante de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ nulle. Celle de $\alpha^0 \otimes (AY_1^0 - Y_1^0)$ est proportionnelle à $\alpha^0 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$, elle appartient donc à $MT_2 \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ car $\alpha^0 \in MT_2$. D'après le lemme 2.13, pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$, celle de $\tilde{m}_{s'} \otimes (A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'})$ appartient à $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$.

   Ainsi, toujours d'après le lemme 2.13, la composante de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ est égale à la somme d'un élément de $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$ et d'une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$m_{\zeta^j} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, ..., m_{\zeta^{p-2}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, m_{\zeta^{p-1}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}.$$

   Puisque E est invariant modulo sous l'action de A, cette composante est nulle. En la considérant successivement pour $j = p-1$,... et enfin $a+1$, on obtient

$$m_{\zeta^{p-1}} \in MT_2,\ m_{\zeta^{p-2}} \in MT_2,\ ...,\ \text{ et enfin } m_{\zeta^{a+2}} \in MT_2.$$

b) De même, on observe les composantes de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{\zeta^{j-1}}$ pour j décroissant de $p-1$ à $p-a+1$ et l'on obtient successivement

$$\tilde{m}_{\zeta^{p-1}},\ \tilde{m}_{\zeta^{p-2}},\ ...,\ m_{\zeta^{p-a+1}} \in MT_1.$$

c) On regarde alors la composante de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} u$. La contribution de $\beta^0 \otimes (Z_0^1 - Z_0^1)$ à cette composante est nulle. Celle de $\alpha^0 \otimes (Y_0^1 - Y_0^1)$ est proportionnelle à $\alpha^0 \otimes u$ et appartient donc à $MT_2 \otimes u$. D'après a) et b), et avec le lemme 2.13, celle de $Az - z$ est égale à la somme d'un élément de $MT_2 \otimes u$ et d'un multiple non nul de $m_{\zeta^{a+1}} \otimes u$. Puisque cette composante est nulle, $m_{\zeta^{a+1}}$ appartient à MT_2.
   De même, l'observation de la composante de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{u}$ montre que $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}$ appartient à MT_1.

Mais alors, puisque $T_1T_2 = 0$, et toujours d'après le lemme 2.13, la composante de $Az - z$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{p-1}}$ est nulle. Or, la contribution de $\beta^0 \otimes (AZ_1^0 - Z_1^0)$ à cette composante est elle aussi nulle d'après ce qui précède, et celle de $\alpha^0 \otimes (AY_1^0 - Y_1^0)$ est égale à $\alpha^0 \otimes w_{\zeta^{p-1}}$, à un scalaire multiplicatif non nul près. On en déduit que $\alpha^0 = 0$. De même, l'observation de la composante de $AE - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{\zeta^{p-1}}$ montre que $\beta^0 = 0$. Ainsi,

$$E = \alpha^1 \otimes Y_1^1 + \beta^1 \otimes Z_1^1 \mod M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_1}.$$

En regardant l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} = \varpi A \varpi^{-1}$ et en utilisant à nouveau le lemme 2.13, on montre ensuite que $\alpha^1 = \beta^1 = 0$ Ainsi, $E \in M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_1}$ et l'on conclut grâce à la proposition 2.15.

□

Notation 8. — Soit $\mathfrak{M}_\chi$ le H_χ-module supersingulier : d'après **[9]** 3.2, c'est le caractère de H_χ donné par

$$T_1 \mapsto 0, \quad T_2 \mapsto 0.$$

Proposition 4.5. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi$ est égal à $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$*

Démonstration. — Soit $E \in \mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi$ un élément $I(1)$-invariant. S'il est dans $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_2}$ alors il appartient $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ d'après la proposition précédente. S'il appartient $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$, $i \geq 2$, alors $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$ d'après la proposition 4.3. On conclut par récurrence.

□

Proposition 4.6. — *Pour tout H_χ-module à droite M, l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ est égal à $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$.*

Démonstration. — Nous montrons la proposition par récurrence sur i. Elle a été prouvée pour $i = 1$. Supposons la démontrée au rang $i - 1$ avec $i \geq 2$. Un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ est de la forme

$$E = \alpha^0 \otimes Y_i^0 + \beta^0 \otimes Z_i^0 + \alpha^1 \otimes Y_i^1 + \beta^1 \otimes Z_i^1 \mod M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$$

avec α^0, $\alpha^1 \in MT_2$, β^0, $\beta^1 \in MT_1$, et $\alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0$, $\beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0$. Si le sous-$H_\chi$-module N de M engendré par les éléments α^0, β^0, α^1, et β^1 est nul alors $E \in M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$ et l'on conclut par l'hypothèse de récurrence. Sinon, on a la suite exacte de H_χ-modules à droite

$$0 \to N \to M \xrightarrow{\mathscr{P}} M/N \to 0$$

qui, par platitude du H_χ-module $\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$, donne la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules

$$0 \longrightarrow N \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}} \longrightarrow M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}} \xrightarrow{\mathscr{P} \otimes id} \mathscr{P}(M) \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}} \longrightarrow 0.$$

L'image de E par $\mathscr{P} \otimes id$ est un élément $I(1)$-invariant appartenant à $\mathscr{P}(M) \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_i}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathscr{P}(M)$,

$$(\mathscr{P} \otimes id)(E) \in \mathscr{P}(M) \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$$

c'est-à-dire qu'il existe $m, \tilde{m} \in M$, tels que

$$E - (m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u}) \in Ker(\mathscr{P} \otimes id) = N \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}.$$

Pour démontrer que $E \in M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$, il suffit alors de remarquer que N est isomorphe à une somme de copies du H_χ-module supersingulier $\mathfrak{M}_\chi$ et d'appliquer la proposition 4.5.

□

4.2. Cas où le corps résiduel de F est égal à $q > p$. — On suppose dans ce paragraphe que le corps résiduel de F est $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$ et que $\chi = 1 \otimes \chi_2$ est le caractère régulier de $I/I(1)$ défini par

$$\chi_2 : \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*},\ x \mapsto x^a,\ \text{ avec } a = p.$$

On note $\mathcal{A}$ l'idéal de H_χ engendré par T_1 et T_2 de sorte que le H_χ-module supersingulier $\mathfrak{M}_\chi$ est égal au quotient $H_\chi/\mathcal{A}$ et que le $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi$ est isomorphe à la limite du système inductif $(\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}})_{i\in\mathbb{N}}$ où les flèches sont les applications linéaires naturelles $\theta_i : \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}} \to \mathbf{C}_\chi^{K_{i+2}}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+2}}$.

Pour $i \in \mathbb{N}$ on définit $X_i \in \mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ par $X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} w^0_{(x,\,\zeta)}$.

Proposition 4.7. — *L'image de X_i dans le quotient $\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$ est un élément $I(1)$-invariant qui n'appartient pas à l'image de θ_{i-1}.*

Corollaire 4.8. — *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi$ est de dimension infinie.*

Preuve de la proposition 4.7. — Assurons nous que l'image de $X_0 = w_\zeta$ dans le quotient $\mathbf{C}_\chi^{K_1}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_1}$ n'appartient à l'image de

$$\mathbf{C}_\chi^{I(1)}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{I(1)} \to \mathbf{C}_\chi^{K_1}/\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_1},$$

c'est-à-dire que X_0 n'appartient pas à $\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_1} + \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$.

D'après [**4**] 2.3.3.2, il suffit de vérifier que X_0 n'est pas dans la somme de $\mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ et de l'image par T_1, modulo du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{\tilde{u}_s, s \in \mathbb{F}_p^*\}$. Le lemme 5 *loc.cit* dit que w_ζ appartient à cet espace si et seulement si $\Phi_1(\zeta^{q-a}) \neq 0$. Or, on a $\Phi_1(\zeta^{q-a}) = -(-1)^{a-1}a = -(-1)^{p-1}p = 0$ mod p. Donc $X_0 = w_\zeta$ n'appartient pas à $\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_1} + \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$. De la proposition 2.7, on déduit alors que X_i n'appartient pas à $\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}} + \mathbf{C}_\chi^{K_i}$.

Montrons que X_i est $I(1)$-invariant modulo $\mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}$. Soit $A \in I(1)$. Nous pouvons utiliser les résultats du lemme 1.10 du fait de la remarque 2.12 qui dit que l'identification que nous avons choisie entre l'ensemble des arêtes de l'arbre et une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $\mathbf{C}_\chi$ est compatible avec l'action de $I(1)$. On en déduit, avec les mêmes calculs que ceux de la preuve de la proposition 3.8 :

$$\begin{aligned} A^{-1}X_i &= \textstyle\sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} sA^{-1}u^0_{(x,s)} \\ &= \textstyle\sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} su^0_{(r_A^0(x),\,s_A^0(x)+s)} \qquad \text{avec les notations du lemme 1.10,} \\ &= \textstyle\sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} (s - s_A^0(x))u^0_{(r_A^0(x),s)}. \end{aligned}$$

Or, par bijectivité de r_A^0, $X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} su^0_{(r_A^0(x),s)}$. D'où, par l'assertion 4 du lemme 1.10,

$$A^{-1}X_i - X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q}(-s_A^0(x))u^0_{(r_A^0(x),s)} = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s^0_{A^{-1}}(x)u^0_{(x,s)}$$

Or, on a $T_1(u_x^0) = \sum\limits_{s\in\mathbb{F}_p} u^0_{(x,s)}$ d'après le lemme 5 *loc.cit.* Ainsi

$$A^{-1}X_i - X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)\ T_1u_x^0 = T_1\Big(\sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)\ u_x^0\Big) \in \mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_i} \subset \mathcal{A}\mathbf{C}_\chi^{K_{i+1}}.$$

$\square$

5. Preuve des lemmes

Preuve du Lemme 1.10. — Pour montrer certaines des assertions du lemme 1.10, nous nous ramènerons au cas de matrices élémentaires du type

$$E_0(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0\\0&\alpha\end{pmatrix},\ E^+(\beta)=\begin{pmatrix}1&\beta\\0&1\end{pmatrix},\ E^-(\gamma)=\begin{pmatrix}1&0\\\gamma&1\end{pmatrix}$$

avec $\alpha\in 1+\pi\mathscr{O}$, $\beta,\gamma\in\pi\mathscr{O}$, en remarquant que tout élément $A=\begin{pmatrix}a&b\\\pi c&d\end{pmatrix}\in I(1)$, s'écrit $A=aE^-(\pi ca^{-1})E_0(a^{-1}(d-\pi cba^{-1}))E^+(ba^{-1})$ (c'est la décomposition d'Iwahori standard). Pour E une matrice élémentaire, nous établissons deux propriétés :

- Soient $i\geq 1$, $s\in\mathbb{F}_q$, $y\in\mathbb{F}_q^{i+1}$, et E une matrice élémentaire. On a l'égalité

$$\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}E^{-1}u_y^0=E^{-1}\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}u_y^0. \tag{29}$$

  Pour la démontrer nous vérifions que le produit

$$g_y^{0\,-1}\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}^{-1}E\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}E^{-1}g_y^0 \tag{30}$$

  appartient à $I(1)$: (i) pour $E=E^+(\beta)$, il est égal à la matrice identité ; (ii) pour $E=E_0(\alpha)$, il est égal à $E^-([s](1-\alpha^{-1}))$; (iii) pour $E=E^-(\gamma)$, il est égal, modulo une matrice à cœfficients dans $\pi^2\mathscr{O}$, à $E^-(-2\pi\gamma[s]a(y))$.

- L'arête $u^0_{(y,0)}$ appartient au faisceau issu de u^0_y. Puisque l'action de G transforme un faisceau en un faisceau, il existe $\phi_E(y,s)\in\mathbb{F}_q$ tel que

$$\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}E^{-1}u^0_{(y,0)}=E^{-1}\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}u^0_{(y,\phi_E(y,s))}. \tag{31}$$

  Nous montrons que l'application $s\mapsto\phi_E(y,s)$ est affine. D'après la remarque 1.6, on a $u^0_{(y,*)}=g_y^0\varpi g_*^0 u$ pour $*\in\mathbb{F}_q$. Ainsi $\phi_E(y,s)$ est l'unique élément de $\mathbb{F}_q$ tel que le produit de matrices

$$(\varpi g^0_{\phi_E(y,s)})^{-1}g_y^{0\,-1}\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}^{-1}E\begin{pmatrix}1&-\pi^i[s]\\0&1\end{pmatrix}E^{-1}g_y^0\varpi g_0^0 \tag{32}$$

  appartient à I. On effectue le calcul de (32) en multipliant (30) à gauche par $(\varpi g^0_{\phi_E(y,s)})^{-1}$ et à droite par ϖg_0^0 : (i) pour $E=E^+(\beta)$, le produit (32) est égal à l'identité pour $\phi_E(y,s)=0$; (ii) pour $E=E_0(\alpha)$, le produit (32) est égal à $E^-([\phi_E(y,s)]+\pi^{-1}(1-\alpha^{-1})[s])$ d'après le calcul précédent. Donc, si $u\in\mathbb{F}_q$ désigne l'élément tel que $\alpha^{-1}=1+\pi[u]\mod\pi^2\mathscr{O}$, $\phi_E(y,s)=us$ convient. (iii) Pour $E=E^-(\gamma)$, le produit (32) est égal, modulo une matrice à cœfficients dans $\pi^2\mathscr{O}$, à $E^-([\phi_E(y,s)]-2\gamma[s]a(y))$. Donc, si y_0 désigne la première coordonnée de y et $v\in\mathbb{F}_q$ l'élément tel que $\gamma=[v]\mod\pi\mathscr{O}$, $\phi_E(y,s)=2svy_0$ convient.

Nous démontrons maintenant les assertions du lemme. Soit A un élément de $I(1)$ (non nécessairement élémentaire). Nous allons considérer que $\epsilon=0$; les résultats obtenus se transposeront alors automatiquement au cas $\epsilon=1$. En effet, pour tous $i\geq 1$, $x\in\mathbb{F}_q^i$, on a $\varpi^{-1}u_x^1=u_x^0$ d'après la remarque 1.6, ainsi, $r_A^1(x)=r^0_{\varpi^{-1}A\varpi}(x)$, $s_A^1(x)=s^0_{\varpi^{-1}A\varpi}(x)$.

Soient $i\geq 1$, $x\in\mathbb{F}_q^i$, $s\in\mathbb{F}_q$.

1. Le fait que la birestriction $r_A^0:\mathbb{F}_q^i\to\mathbb{F}_q^i$ est bijective provient du fait que pour tout $x\in\mathbb{F}_q^i$, $r_A^0(x)$ est entièrement déterminé par $Au^0_{r_A(x)}=u_x^0$.

2. Puisque l'action de $I(1)$ conserve le type arêtes, la distance et l'orientation, l'égalité (29), démontrée pour les matrices élémentaires, est vraie pour tout produit de matrices élémentaires. Du fait de la décomposition d'Iwahori standard, la matrice A vérifie donc l'égalité (29), que l'on écrit pour $y = (x, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} u^0_{(x,0)} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^0_{(x,0)},$$

c'est-à-dire, d'après l'exemple 1.8, $\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} u^0_{(x,0)} = A^{-1} u^0_{(x,s)}$. Sachant que $u^0_{(r^0_A(x), s^0_A(x))} = A^{-1} u^0_{(x,0)}$, on obtient $u^0_{(r^0_A(x), s^0_A(x)+s)} = A^{-1} u^0_{(x,s)}$.

3. On a $A u^0_{r^0_A(x,s)} = u^0_{(x,s)}$, donc par la propriété 2, $r^0_A(x,s) = (r^0_A(x), s^0_A(x) + s)$.

4. Soit $B \in I(1)$. On a $u^0_{(r^0_{AB}(x), s^0_{AB}(x))} = (AB)^{-1} u^0_{(x,0)} = B^{-1} u^0_{(r^0_A(x), s^0_A(x))}$. Par la propriété 2,

$$B^{-1} u^0_{(r^0_A(x), s^0_A(x))} = u^0_{(r^0_B \circ r^0_A(x),\, s^0_B \circ r^0_A(x) + s^0_A(x))}.$$

On en déduit que $r^0_{AB} = r^0_B \circ r^0_A$, et $s^0_{AB} = s^0_B \circ r^0_A + s^0_A$. Pour la matrice identité notée Id, on a $r_{Id}(x) = x$ et $s_{Id}(x) = 0$. Ainsi, $r^0_{A^{-1}} = (r^0_A)^{-1}$ et $s^0_{A^{-1}} \circ r^0_A = -s^0_A$.

5. Supposons l'assertion 5 vérifiée pour deux éléments B et C de $I(1)$. Par la propriété 4, $s^0_{BC}(x,s) = s^0_C \circ r^0_B(x,s) + s^0_B(x,s)$. Or, la propriété 3 dit que $r^0_B(x,s) = (r_B(x), s_B(x) + s)$. Donc l'assertion 5 est vérifiée pour le produit BC. Par conséquent, il suffit de la démontrer pour les matrices élémentaires. Soit E une matrice élémentaire. Nous avons vu au début de cette preuve qu'il existe un élément $\phi_E(x, 0, s)$ qui dépend de s de façon affine tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1} u^0_{(x,0,0)} = E^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^0_{(x,0,\phi_E(x,0,s))}. \tag{33}$$

- Supposons que $F = \mathbb{F}_q((T))$. D'après l'exemple 1.9, le terme de droite de l'égalité (33) est $E^{-1} u^0_{(x,s,\phi_E(x,0,s))}$, qui d'après la propriété 2, est égal à $u^0_{(r^0_E(x,s),\, s^0_E(x,s)+\phi_E(x,0,s))}$. Etudions le terme de gauche. Par définition, on a $E^{-1} u^0_{(x,0,0)} = u^0_{(r^0_E(x,0), s^0_E(x,0))}$. Mais, d'après l'assertion 3, $r^0_E(x,0) = (r^0_E(x), s^0_E(x))$. Par conséquent, et d'après l'exemple 1.9, le terme de gauche de l'égalité est $u^0_{(r^0_E(x),\, s+s^0_E(x),\, s^0_E(x,0))}$. On en déduit que $s^0_E(x,s) = -\phi_E(x,0,s) + s^0_E(x,0)$, ainsi, l'application $s \mapsto s^0_E(x,s)$ est bien une application affine.
- Supposons que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. D'après l'exemple 1.9, et puisque $Q(s^{1/p}, 0) = 0$, le terme de droite de l'égalité (33) est $E^{-1} u^0_{(x,s,\phi_E(x,0,s))}$, qui d'après la propriété 2, n'est autre que $u^0_{(r^0_E(x,s),\, s^0_E(x,s)+\phi_E(x,0,s))}$. Etudions le terme de gauche. Par définition, on a $E^{-1} u^0_{(x,0,0)} = u^0_{(r^0_E(x,0), s^0_E(x,0))}$. Mais d'après l'assertion 3, on a $r^0_E(x,0) = (r^0_E(x), s^0_E(x))$. Par conséquent, et d'après l'exemple 1.9, le terme de gauche de l'égalité est $u^0_{(r^0_E(x),\, s+s^0_E(x),\, s^0_E(x,0) + Q(s^{1/p}, s^0_E(x)^{1/p}))}$. On en déduit que

$$s^0_E(x,s) = -\phi_E(x,0,s) + s^0_E(x,0) + Q(s^{1/p}, s^0_E(x)^{1/p}) \tag{34}$$

  ainsi, l'application $s \mapsto s^0_E(x, s^p)$ est bien une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

6.
- Supposons que $F = \mathbb{F}_q((T))$ avec $q > 2$. D'après la propriété 5, la fonction $s \mapsto s^0_A(x,s)$ est polynomiale en s de degré inférieur ou égal à 1. La somme pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ de $s^0_A(x,s)$ est nulle d'après la remarque 1.13.
- Supposons que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, avec $q > p$. Sommer les $s^0_A(x,s)$ pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ revient à sommer les $s^0_A(x,s^p)$ pour s parcourant $\mathbb{F}_q$. La propriété 5 dit que l'application $s \mapsto s^0_A(x,s^p)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à p. Puisque $q - 1 > p$, la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ de $s^0_A(x,s^p)$ est nulle d'après la remarque 1.13.

– Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. Supposons l'assertion 6 vérifiée pour deux éléments B et C de $I(1)$. On a alors, d'après les propriétés 3 et 4,

$$s^0_{BC}(x,s) = s^0_C(r^0_B(x,s)) + s^0_B(x,s) = s^0_C(r^0_B(x), s^0_B(x)+s) + s^0_B(x,s).$$

Sommant cette égalité pour s parcourant $\mathbb{F}_p$, on a

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_{BC}(x,s) = \sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_C(r^0_B(x),s) + \sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_B(x,s).$$

Puisqu'on a supposé l'assertion 6 vérifiée pour B et C, et en appliquant à nouveau la propriété 4,

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_{BC}(x,s) = s^0_C(r^0_B(x)) + s^0_B(x) = s^0_{BC}(x).$$

Donc le produit BC vérifie l'assertion 6.

Ainsi, il suffit de démontrer la propriété 6 pour une matrice E élémentaire. Dans ce cas, on dispose de l'égalité (34) qui s'écrit

$$s^0_E(x,s) = -\phi_E(x,0,s) + s^0_E(x,0) + Q(s, s^0_E(x)). \tag{34}$$

Puisque $s \mapsto \phi_E(x,0,s)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1 et que $p-1>1$, la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_p$ de $\phi_E(x,0,s)$ est nulle d'après la remarque 1.13. De plus, la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_p$ de $Q(s, s^0_E(x))$ est égale à $s^0_E(x)$. Ainsi,

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_E(x,s) = \sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(s, s^0_E(x)) = s^0_E(x).$$

Si $p=2$ et E est une matrice élémentaire de type $E^+(\beta)$ ou $E^-(\gamma)$ le début de la preuve du lemme dit que $\phi_E(x,0,s)=0$ donc l'égalité précédente est toujours vérifiée.

□

5.1. Lemmes relatifs au cas Iwahori. —

Preuve du lemme 3.2. — On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$. Soient $i\in\mathbb{N}$, $i \geq 1$, $A \in I(1)$ et $A \in I(1)^{\pm}$ si $p=2$. On démontre le lemme pour $\epsilon = 1$. Le cas $\epsilon = 0$ s'en déduit en effectuant une translation par ϖ^{-1}, car $X^1_{i+1} = \varpi X^0_i$ et $s^1_A = s^0_{\varpi^{-1}A\varpi}$. On reprend le début de la preuve de la proposition 3.8 qui donne l'égalité suivante dans $\mathbf{C}_\mathbf{1}^{K_{i+2}}$,

$$AX^1_{i+1} - X^1_{i+1} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s^1_A(x) S\Omega u^1_x.$$

Puisque $S^2 = -S$, on en déduit

$$S(AX^1_{i+1} - X^1_{i+1}) = -S \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s^1_A(x)\Omega u^1_x \tag{35}$$

– Si $i=1$, on a d'après (21) $\Omega(S+1)u^1_x = \Omega(S+1)\Omega u$, donc pour tout $x\in\mathbb{F}_p$:

$$\begin{aligned} S(AX^1_1 - X^1_1) &= -S \sum_{x\in\mathbb{F}_p} s^1_A(x)(\Omega(S+1)\Omega u - \Omega S u^1_x) \\ &= S\Omega S \sum_{x\in\mathbb{F}_p} s^1_A(x) u^1_x - S\Omega(S+1) \sum_{x\in\mathbb{F}_p} s^1_A(x)\Omega u \end{aligned}$$

C'est la formule du lemme au rang 1.

– Supposons le lemme démontré pour $i\in\mathbb{N}$, $i\geq 1$. Pour $x = (x_0, ..., x_{i-1}, x_i) \in \mathbb{F}_p^{i+1}$, l'arête u^1_x est adjacente à $u^1_{(x_0,...,x_{i-1})}$, donc $\Omega u^1_x = \Omega(S+1)\Omega u^1_{(x_0,...,x_{i-1})} - \Omega S u^1_x$. La relation (35) au rang $i+1$ se traduit alors par

$$S(AX^1_{i+2} - X^1_{i+2}) = -S \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i+1}} s^1_A(x)(\Omega(S+1)\Omega u^1_{(x_0,...,x_{i-1})} - \Omega S u^1_x)$$

D'après le lemme 1.10-6, $\sum_{x_i\in\mathbb{F}_p} s_A^1(x_0,...,x_{i-1},x_i) = s_A^1(x_0,...,x_{i-1})$. D'où

$$\begin{aligned} S(AX_{i+2}^1 - X_{i+2}^1) &= S\Omega S \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i+1}} s_A^1(x)u_x^1 - S\sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s_A^1(x)u_x^1 \\ &\quad -S\Omega S\sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s_A^1(x)\Omega u_x^1 \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant l'égalité (35) au rang i,

$$\begin{aligned} S(AX_{i+2}^1 - X_{i+2}^1) &= S\Omega S \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i+1}} s_A^1(x)u_x^1 - S\sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s_A^1(x)u_x^1 \\ &\quad +S\Omega S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1) \end{aligned}$$

On remplace dans cette formule $S\Omega S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1)$ par sa valeur donnée par l'hypothèse de récurrence et l'on obtient l'égalité souhaitée au rang $i+1$.

□

5.2. Lemmes relatifs au cas régulier. —

Preuve du lemme 2.13. — Pour tout $i \in \{1,...,p-1\}$, on a

$$w_{\zeta^i} = \sum_{k\in\mathbb{F}_p^*} k^i u_k = \sum_{k\in\mathbb{F}_p} k^i u_k. \tag{36}$$

Soit $i \in \{1,...,p-1\}$. D'après l'exemple 1.8, l'action de A transforme l'arête u_k en l'arête u_{k-1}. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_0 w_{\zeta^j} - w_{\zeta^j} &= \sum_{k\in\mathbb{F}_p} ((k+1)^j - k^j)u_k \\ &= u_0 + \sum_{k\in\mathbb{F}_p^*}(\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}k^i)uk = u_0 + \sum_{k\in\mathbb{F}_p^*} u_k + \sum_{k\in\mathbb{F}_p^*}(\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j}{i}k^i)u_k \\ &= u_0 + w_1 + \sum_{i=1}^{j-1}\binom{j}{i} w_{\zeta^i} \text{ d'après l'égalité (36).} \qquad (37) \end{aligned}$$

- Supposons maintenant que $\zeta^j \in J$, c'est-à-dire $j \in \{a+1,...,p-1\}$. Alors

$$A_0 w_{\zeta^j} - w_{\zeta^j} = u_0 + w_1 + \sum_{i=1}^{a}\binom{j}{i} w_{\zeta^i} + \sum_{i=a+1}^{j-1}\binom{j}{i} w_{\zeta^i},$$

où la deuxième somme est vide si $j = a+1$.
Grâce au lemme 5 *loc.cit*, nous remplaçons, dans la première somme, l'élément u_0+w_1 par $T_1(\tilde{u})$, l'élément w_{ζ^a} par $-u+(\Phi_1(1))^{-1}T_1(\tilde{w}_1)$, et pour $i \in \{1,...,a-1\}$, l'élément w_{ζ^i} par $\Phi_1(\zeta^{i-a})^{-1}T_1(\tilde{w}_{\zeta^{i-a}})$, sachant que les valeurs de Φ_1 qui apparaissent ne s'annulent pas. Ces valeurs sont du reste reliées aux cœfficients du polynôme $(1-X)^a$, et l'on a, pour tout $i \in \{1,...,a\}$, $\Phi_1(\zeta^{i-a}) = -(-1)^{a-i}\binom{a}{i}$.
Ainsi,

$$A_0 w_{\zeta^j} - w_{\zeta^j} = T_1(\tilde{u}) - \binom{j}{a} u - \sum_{i=1}^{a}(-1)^{a-i}\binom{j}{i}\binom{a}{i}^{-1} T_1(\tilde{w}_{\zeta^{i-a}}) + \sum_{i=a+1}^{j-1}\binom{j}{i} w_{\zeta^i}.$$

On a montré, pour $j \in \{a+1,...,p-1\}$, que $A_0 w_{\zeta^j} - w_{\zeta^j}$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$u,\ T_1(\tilde{u}),\ w_{\zeta^{a+1}},...,w_{\zeta^{j-1}},\ T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-a}}),...,T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-1}}).$$

- Supposons maintenant que $\zeta^j \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, c'est-à-dire $j \in \{p-a, ..., p-1\}$. Le calcul de $A_0\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j}$ débute comme celui de $A_0 w_{\zeta^j} - w_{\zeta^j}$ et l'on peut reprendre l'égalité (37) en passant aux éléments opposés :

$$\begin{aligned} A_0\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j} &= \tilde{u}_0 + \tilde{w}_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i} \\ &= \tilde{u}_0 + \tilde{w}_1 + \sum_{i=1}^{p-a-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i} + \sum_{i=p-a}^{j-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i}, \end{aligned}$$

où la deuxième somme est vide si $j = p - a$.
Grâce au lemme 5 *loc.cit*, nous remplaçons, dans la première somme l'élément $\tilde{u}_0 + \tilde{w}_1$ par $T_2(u)$, l'élément $\tilde{w}_{\zeta^{p-1-a}}$ par $-(-1)^a\tilde{u} + (\Phi_2(\zeta^{-a}))^{-1}T_2(w_1)$, et pour tout $i \in \{1, ..., p-a-2\}$, l'élément $\tilde{w}_{\zeta^i}$ par $\Phi_2(\zeta^i)^{-1}T_2(w_{\zeta^{i+a}})$, sachant que les valeurs de Φ_2 qui apparaissent ne s'annulent pas, et sont reliées aux les cœfficients du polynôme $(1-X)^{p-1-a}$: on a, pour tout $i \in \{1, ..., p-1-a\}$, $\Phi_2(\zeta^i) = -(-1)^i \binom{p-1-a}{i}$. Ainsi,

$$A_0\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j} = T_2(u) - (-1)^a \binom{j}{p-1-a} \tilde{u} - \sum_{i=1}^{p-a-1} (-1)^i \binom{j}{i} \binom{p-1-a}{i} T_2(w_{\zeta^{i+a}}) + \sum_{i=p-a}^{j-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i}.$$

On a montré, pour $j \in \{p-a, ..., p-1\}$, que $A_0\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j}$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$T_2(u),\ \tilde{u},\ \tilde{w}_{\zeta^{p-a}}, ..., \tilde{w}_{\zeta^{j-1}},\ T_2(w_{\zeta^{a+1}}), ..., T_1(w_{\zeta^{p-1}}).$$

□

Preuve du lemme 2.14. — L'action de A_0 sur E se calcule grâce au lemme 2.13. Etudions les coordonnées de $AE - E$ dans la décomposition :

$$M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{K_1} = \bigoplus_{s \in J} M \otimes_{H_\chi} w_s \oplus \bigoplus_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)} M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{s'} \oplus M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}.$$

a) Soit $j \in \{a+2, ..., p-1\}$. D'après le lemme 2.13, pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, la contribution de $\tilde{m}_{s'} \otimes (A_0\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'})$ à la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ appartient à $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$. Ainsi, toujours d'après le lemme 2.13, la composante de $A_0E - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ est égale à la somme d'un élément de $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$ et d'une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$m_{\zeta^j} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, ..., m_{\zeta^{p-2}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, m_{\zeta^{p-1}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}.$$

Si E est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ sous l'action de A_0, cette composante est nulle. En la considérant successivement pour $j = p-1$, $p-2$,... et enfin $a+2$, on obtient

$$m_{\zeta^{p-1}},\ m_{\zeta^{p-2}},\ \ldots \text{ et enfin } m_{\zeta^{a+2}} \text{ appartiennent à } MT_2.$$

b) De même, on observe les composantes de $A_0E - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{\zeta^{j-1}}$ pour j décroissant de $p-1$ à $p-a+1$. En supposant que E est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ sous l'action de A, on obtient successivement

$$\tilde{m}_{\zeta^{p-1}},\ \tilde{m}_{\zeta^{p-2}},\ \ldots,\ m_{\zeta^{p-a+1}} \text{ appartiennent à } MT_1.$$

c) Soit $j \in \{a+2, ..., p-1\}$. Grâce à b), au lemme 2.13 et puisque $T_1T_2 = 0$, il apparaît alors que, pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, $s' \neq \zeta^{p-a}$ le terme $\tilde{m}_{s'} \otimes (A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'})$ apporte une contribulion nulle à la composante de $A_0E - E$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$. Pour $s' = \zeta^{p-a}$, cette contribution est égale à, un scalaire multiplicatif non nul, près à $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$. Par conséquent, reprendre le raisonnement de a) donne désormais un résultat plus précis :

$$m_{\zeta^{p-1}},\ m_{\zeta^{p-2}},\ \ldots,\ \text{ et } m_{\zeta^{a+2}} \text{ sont proportionnels à } \tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2.$$

d) De la même façon, le point a) permet d'affiner le résultat de b) :

$$\tilde{m}_{\zeta^{p-1}},\ \tilde{m}_{\zeta^{p-2}},\ ...,\ \text{ et } m_{\zeta^{p-a+1}} \text{ sont proportionnels à } m_{\zeta^{a+1}}T_1.$$

e) En tenant compte du résultat de a) et de b) et puisque $T_1T_2 = 0$, le lemme 2.13 dit que la composante de $A_0E - E$ selon $M \otimes w_{\zeta^{p-1}}$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près à $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2 \otimes w_{\zeta^{p-1}}$, et sa composante selon $M \otimes \tilde{w}_{\zeta^{p-1}}$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près à $m_{\zeta^{a+1}}T_1 \otimes \tilde{w}_{\zeta^{p-1}}$. Supposant que E est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} \mathbf{C}_\chi^{I(1)}$ sous l'action de A_0, ces deux composantes sont nulles. On en déduit que

$$m_{\zeta^{a+1}}T_1 = 0,\ \ \tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2 = 0.$$

puis, que $m_{\zeta^{p-1}}, m_{\zeta^{p-2}}, ..., m_{\zeta^{a+2}}$ et $\tilde{m}_{\zeta^{p-1}}, \tilde{m}_{\zeta^{p-2}}, ..., \tilde{m}_{\zeta^{p-a+1}}$ sont nuls, grâce aux résultats de c) et d).

□

Preuve du lemme 4.2. — On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$. Soit $i \geq 1$. On démontre le lemme pour $\epsilon = 0$. Le cas $\epsilon = 1$ s'en déduit aisément car on note que $\varpi Z_i^0 = Z_{i+1}^1$, $\varpi Y_i^0 = Y_{i+1}^1$ et que l'on a l'égalité matricielle $\varpi A_{i-1}^1 \varpi^{-1} = A_{i-1}^0$. Par définition, $Z_i^0 = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} w^0_{(x,\zeta^{1+a})}$. D'après le lemme 5 de [**4**], on a $T_2(Z_i^0) = \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i, s\in\mathbb{F}_p} s\tilde{u}^0_{(x,s)}$ où $\Phi_2(\zeta) \neq 0$. D'après la remarque 2.12, on peut appliquer les résultats du lemme 1.10 pour étudier l'action de $A := A_{i-1}^0$ sur $T_2(Z_i^0)$ et l'on reprend les calculs de la preuve de la proposition 4.7 pour obtenir

$$A_{i-1}^0 T_2(Z_i^0) - T_2(Z_i^0) = \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s_A^0(x) T_2(\tilde{u}_x^0).$$

La condition (iv) du théorème 3 *loc.cit* est vérifiée puisque $F = \mathbb{Q}_p$: on a la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$0 \longrightarrow T_1\mathbf{C}_\chi \longrightarrow \mathbf{C}_\chi \xrightarrow{T_2} T_2\mathbf{C}_\chi \longrightarrow 0.$$

On en déduit que, modulo l'image $T_1\mathbf{C}_\chi$ de T_1, on a l'égalité suivante :

$$AZ_i^0 - Z_i^0 = \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s_A^0(x)\tilde{u}_x^0 = \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1} s\in\mathbb{F}_p} s_A^0(x,s)\tilde{u}^0_{(x,s)}.$$

D'après l'exemple 1.12, on a $s_A^0(x,s) = Q(1,s)$. Ainsi, $s_A^0(x,s)$ s'écrit $s_A^0(x,s) = \sum_{k=1}^{p-1} q_k s^k$, où chacun des $q_k \in \overline{\mathbb{F}}_p$ est non nul. Donc,

$$AZ_i^0 - Z_i^0 \;=\; \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{s\in\mathbb{F}_p^*} \sum_{k=1}^{p-1} q_k s^k \tilde{u}^0_{(x,s)} = \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} q_k \zeta^{jk} \tilde{u}^0_{(x,\zeta^j)}.$$

On reconnaît alors la transformée de Fourier $\sum_{j=1}^{p-1} \zeta^{jk}\tilde{u}^0_{(x,\zeta^j)} = \tilde{w}^0_{(x,\zeta^k)}$, donc

$$AZ_i^0 - Z_i^0 \;=\; \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{k=1}^{p-1} q_k \tilde{w}^0_{(x,\zeta^k)}$$

où les q_k sont tous non nuls. On rappelle que $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J) = \{\zeta^{p-a}, ..., \zeta^{p-1}\}$. Pour k appartenant à $\{1, ..., p-a-1\}$, on remplace, avec le lemme 9 *loc.cit*

$$\tilde{w}^0_{(x,\zeta^{p-1-a})} \quad \text{par} \quad -(-1)^a u_x^0 + \Phi_2(\zeta^{-a})^{-1} T_2(w^0_{(x,\zeta^{p-1})}) = -(-1)^a u_x^0 - (-1)^a T_2(w^0_{(x,\zeta^{p-1})}),$$

$$\tilde{w}^0_{(x,\zeta^k)} \quad \text{par} \quad \Phi_2(\zeta^k)^{-1} T_2(w^0_{(x,\zeta^{k+a})}).$$

On a alors le résultat annoncé.

□

Références

[1] Barthel, L. ; Livné, R. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. 75, no. 2, 261-292 (1994).

[2] Barthel, L. ; Livné, R. Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory 55 (1995).

[3] Breuil, C. Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compositio Math. 138, no. 2, 165–188 (2003).

[4] Ollivier, R. Platitude du pro-p-module universel de $\mathrm{GL}_2(F)$ en caractéristique p. Compositio Math. 143, no. 2, 703–720 (2007).

[5] Ollivier, R. Mod p representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ and cœfficient systems on the tree. Preprint (2007).

[6] Paskunas, V. Coefficient systems and supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 99, (2004).

[7] Schneider, P. ; Stuhler, U. Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 85, 97–191 (1997).

[8] Serre, J.-P. Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, (1977).

[9] Vignéras, M.-F. Representations modulo p of the p-adic group $\mathrm{GL}(2, F)$. Compositio Math. 140, no. 2, 333–358 (2004).

Rachel Ollivier, DMA, ENS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* `rachel.ollivier@ens.fr`
Url : `http://www.dma.ens.fr/~ollivier`